В. В. Казаков

# ГЕОМЕТРИЯ

7

В. В. Казаков

# ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 7 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

*Допущено*
*Министерством образования*
*Республики Беларусь*

Минск «Народная асвета» 2017

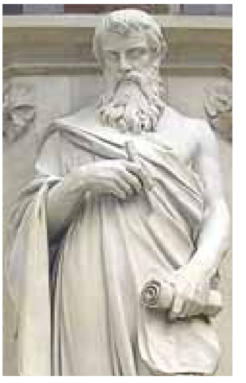
УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
К14

В оформлении обложки использован фрагмент фрески
Рафаэля Санти «Афинская школа»

Рецензенты:
кафедра методов оптимального управления факультета прикладной математики
и информатики Белорусского государственного университета
(кандидат физико-математических наук доцент *Л. И. Лавринович*);
учитель математики высшей квалификационной категории
государственного учреждения образования «Несвижская гимназия» *П. М. Романчук*

ISBN 978-985-03-2819-9

# ВВЕДЕНИЕ



Статуя в честь Евклида в Музее естественной истории Оксфордского университета (Англия)

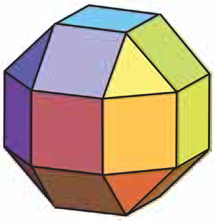
**Геометрия** возникла в глубокой древности и считается одной из первых наук. Появление геометрических знаний связано с практической деятельностью людей. В переводе с древнегреческого «геометрия» означает «землемерие». Некоторые геометрические факты встречаются уже в вавилонских клинописных табличках и египетских папирусах (3-е тысячелетие до н. э.). Древние греки уделяли большое внимание изучению геометрии. Имена таких ученых как Евклид, Архимед, Пифагор навсегда вошли в историю человеческой мысли. На академии древнегреческого философа Платона была выбита надпись «*Да не войдет сюда тот, кто не знает геометрии*». Образованный человек обязан был знать геометрию.

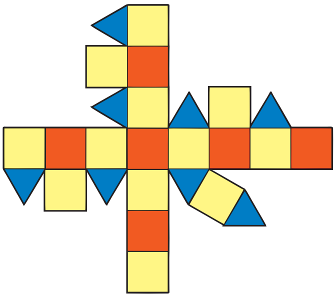
На обложке учебного пособия использован фрагмент картины великого итальянского художника эпохи Возрождения Рафаэля Санти «Афинская школа» (академия Платона), где изображены Евклид и его ученики, решающие геометрическую задачу.

Сегодня, как и во времена Евклида, геометрия — востребованная наука. В университетах всего мира изучают начертательную, аналитическую и компьютерную геометрию. Геометрия широко используется в инженерном деле, архитектуре, живописи, на производстве и в практической деятельности человека.

Изучение геометрии развивает умение человека рассуждать логически, обосновывать свою точку зрения.

А теперь о том, что изучает геометрия. Мир вокруг нас состоит из предметов, которые характеризуются некоторыми свойствами: цветом, плотностью, составом вещества и т. д. Из всех свойств математиков интересует только форма, размеры и расположение предметов относительно друг друга. Поэтому предметы в геометрии называются фигурами, а сама геометрия занимается изучением свойств этих фигур.



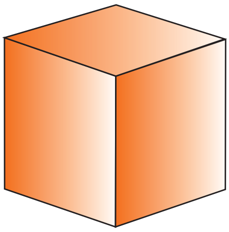


Геометрические фигуры — это идеализированные модели окружающих предметов. На рисунке вы видите здание Национальной библиотеки, его геометрическую модель, а дальше — развертку поверхности этой фигуры, состоящую из треугольников и квадратов.

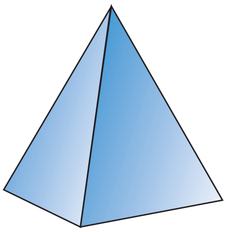
Геометрические фигуры могут быть плоскими и характеризоваться, например, шириной и длиной, как прямоугольник. А могут быть пространственными и характеризоваться еще и высотой, как параллелепипед. Часть пространства, ограниченную со всех сторон, называют *геометрическим телом*.

Геометрические тела имеют *поверхность* — это граница (оболочка) тела. Так, поверхность куба состоит из шести квадратов, поверхностью шара является сфера. Некоторые поверхности являются плоскими, как оконное стекло, другие — искривленными, как поверхность чашки. При пересечении двух поверхностей образуются *линии*. Вы видите эти линии на ребрах куба и пирамиды.

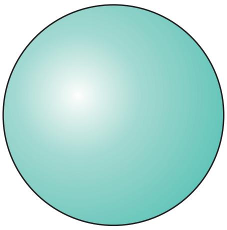
Если шар пересечь плоскостью, то на его поверхности получим замкнутую кривую линию — окружность. На глобусе — это, например, линия экватора. При пересечении двух линий получаются *точки*. У куба или пирамиды — это вершины, в которой сходятся ребра.



*Куб*



*Пирамида*

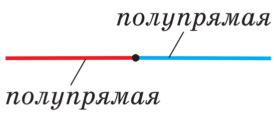


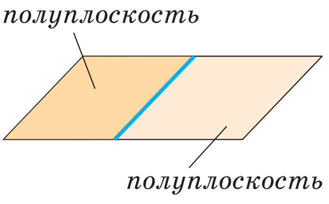
*Шар*

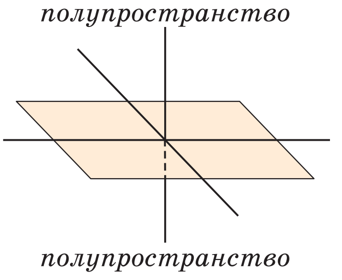
Геометрические фигуры такие, как *точка, прямая* и *плоскость* — это воображаемые, или так называемые, *абстрактные понятия*. Реальная точка, отмеченная на бумаге, всегда имеет размеры, пусть и малые. А вот математическая точка размеров не имеет, это воображаемая точка. Математическая прямая не имеет толщины и бесконечна в обе стороны. Плоскость также не имеет толщины и бесконечна во все стороны. Прямая линия получается при пересечении двух плоскостей. Прямую нельзя изобразить на листе бумаги полностью, а только некоторую ее часть в виде отрезка.

Считается, что прямая, плоскость, любая линия, поверхность, геометрическое тело состоят из точек. И вообще, всякую *геометрическую фигуру* мы представляем себе составленной из точек.

Если на прямой отметить точку, то она разобьет прямую на две полупрямые (на два луча). Если на плоскости провести прямую, то она разобьет плоскость на две полуплоскости. Плоскость разбивает пространство на два полупространства.

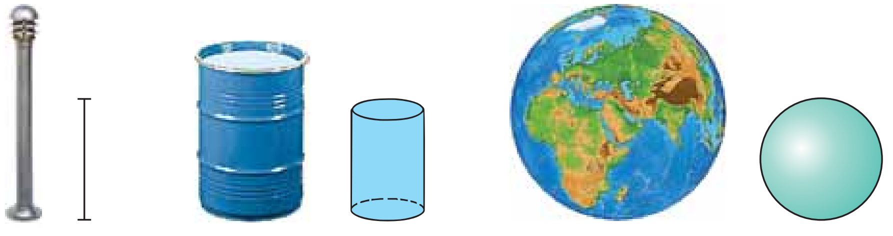



Для исследования реальных объектов рассматривают их математические модели. Так, моделью столба может быть отрезок. Моделью бочки может быть цилиндр, а моделью земного шара — геометрический шар.

И теперь несколько слов о том, как устроено пособие. Материал в нем состоит из 5 глав. Каждая глава разделена на



параграфы. В параграфе сформулированы и доказаны свойства геометрических фигур. В конце параграфа даны *задания*, которые включают в себя:

а) ключевые задачи параграфа с решениями;

б) задачи для самостоятельного решения, где знаком (*) отмечены задания повышенной трудности.

Другие задания к параграфу предназначены для раскрытия творческих способностей учащихся. В этих заданиях необходимо перевести какую-либо проблему на язык математики и решить ее (рубрика «Моделирование»), применить геометрические знания в практической деятельности (рубрика «Реальная геометрия»), ознакомиться с геометрическим материалом, который будет изучаться позднее (рубрика «Геометрия 3D»).

В каждой главе имеются задания для работы с Интернетом. Приведем пример такого задания.

При помощи **Интернета** выясните, жили ли в один период времени два великих древнегреческих ученых: **Евклид** и **Архимед**. Чем знаменит каждый из них? В каких городах они проживали и каким странам сегодня принадлежат эти города?

На форзацах в начале и конце учебного пособия приводится учебный материал в краткой форме.

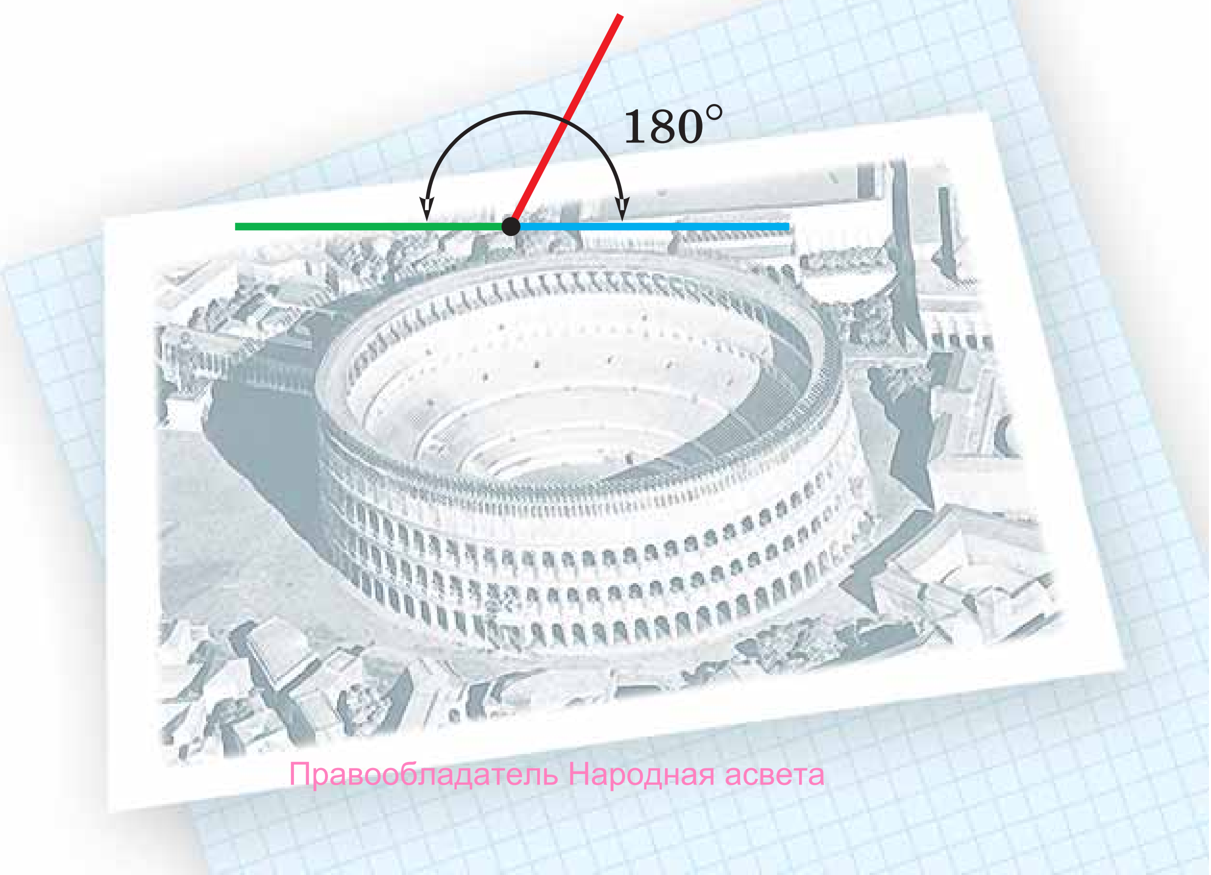
Мы надеемся, что учащимся будет интересно изучать геометрию в 7-м классе и желаем успеха в постижении одной из самых красивых наук!

Глава I

# Начальные понятия геометрии

**В этой главе вы узнаете:**

- Чем занимается геометрия.
- В чем различие круга и окружности.
- Какие углы называются смежными.
- Какая фигура называется перпендикуляром.



# § 1. Повторение геометрического материала 5—6 классов

Вам уже известны такие геометрические фигуры как прямая, луч, отрезок, окружность, угол, а также параллельные и перпендикулярные прямые. Вспомним ранее полученные сведения об этих фигурах.

## 1.1. Прямая, луч, отрезок

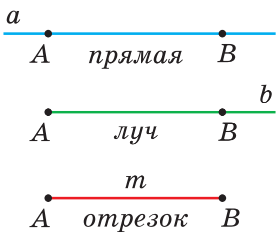


Рис. 1

**Прямую** можно представить как туго натянутую нить, бесконечную в обе стороны. Прямая изображается отрезком, который может быть продолжен в обе стороны.

**Луч** и **отрезок** — это части прямой. Луч можно представить как луч от фонарика, а отрезок — как карандаш. Луч состоит из точки прямой (*начало луча*) и всех ее точек, лежащих по одну сторону от данной точки. Отрезок состоит из двух точек прямой (*концов отрезка*) и всех ее точек, лежащих между двумя данными точками.

На рисунке 1 показаны: прямая $AB$ (или $BA$, или $a$), луч $AB$ (или $b$), отрезок $AB$ (или $BA$, или $m$). При назывании или записи луча двумя буквами на первом месте ставится начало луча.

## 1.2. Измерение отрезков

Для сравнения отрезков их можно наложить друг на друга. Если отрезки совпадут своими концами, то они равны, если нет — то отрезок, который лежит внутри другого отрезка, считается меньшим. На рисунке 2 отрезок $AB$ меньше отрезка $CD$, то есть $AB < CD$. Равные отрезки на чертеже иногда обозначают равным числом черточек на них.

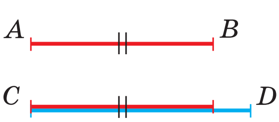


Рис. 2

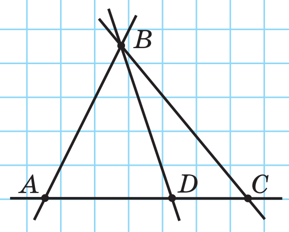
Отрезки можно сравнить, измерив их длины. Отрезок измеряется при помощи других отрезков, которые приняты за единицу длины: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км и т. д. Если на данном отрезке $AB$ укладывается три отрезка по 1 дм, пять отрезков по 1 см и два отрезка по 1 мм, то длина отрезка $AB$ равна 3 дм 5 см 2 мм. При решении геометрических задач длины всех отрезков обычно записывают в одних единицах: $AB = 352$ мм или $AB = 3{,}52$ дм. Если в условии размерность не указана, то считается, что длины отрезков выражены в одних единицах.

Часто вместо слов «длина отрезка равна 12 см» говорят «отрезок равен 12 см», вместо «найдите длину отрезка» — «найдите отрезок».

А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

Назовите прямые, отрезки и лучи, изображенные на рисунке.




## 1.3. Окружность и круг

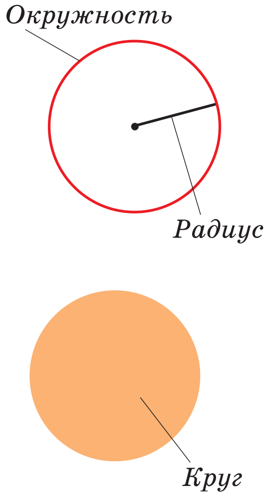



*Рис. 3*

**Окружность** — это замкнутая линия на плоскости, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от одной точки — центра окружности.

**Круг** — это внутренняя часть плоскости, ограниченная окружностью.

Размеры окружности и круга определяются их *радиусом* — отрезком, который соединяет центр с точкой на окружности (рис. 3).

В математике «окружность» и «круг» — два различных, хотя и связанных между собой, понятия. Окружность, например, является моделью обруча, а круг — моделью крышки люка.

## 1.4. Угол

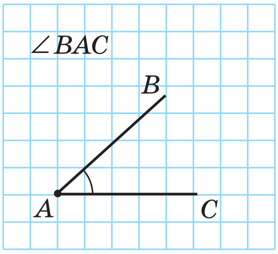



*Рис. 4*

Если из точки провести два луча, то получим **угол**. Эти лучи называются *сторонами* угла, а их общая точка — его *вершиной*. При записи угла тремя большими буквами вершина угла записывается в центре.

На рисунке 4 лучи $AB$ и $AC$ — стороны угла $BAC$ (или $CAB$), точка $A$ — вершина угла. Если понятно из рисунка, о каком угле идет речь, то его обозначают одной буквой при вершине угла: $\angle A$. Часто углы обозначают числами, поставленными внутри угла у его вершины, или малыми буквами греческого алфавита: α (альфа), β (бета), γ (гамма), φ (фи). Обычно равные углы на чертеже обозначают равным числом дуг.

Угол, изображенный на плоскости, делит ее на две части, каждая из которых называется *плоским* углом. На рисунке 5 это углы α и β. Далее мы будем рассматривать плоские углы. Слово «плоский» при названии углов употреблять не будем.

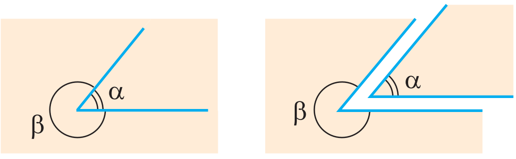



*Рис. 5*

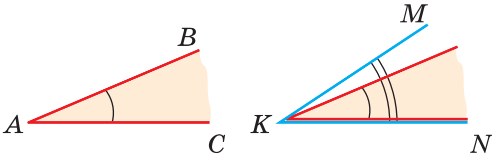



*Рис. 6*

Сравнить углы можно наложением, совместив сторону одного угла со стороной другого. Если углы совпадут, то они равны; если нет, то угол, который лежит внутри другого угла, считается меньшим. На рисунке 6 $\angle BAC$ меньше, чем $\angle MKN$.

## 1.5. Измерение углов

Если стороны угла повернуть вокруг его вершины так, чтобы они образовали прямую, то получим **развернутый** угол (рис. 7).


*Рис. 7*

Углы можно сравнить, измерив их величины. Углы измеряются в градусах. Величину развернутого угла принимают за 180°. Тогда 1° — это $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла, кото-

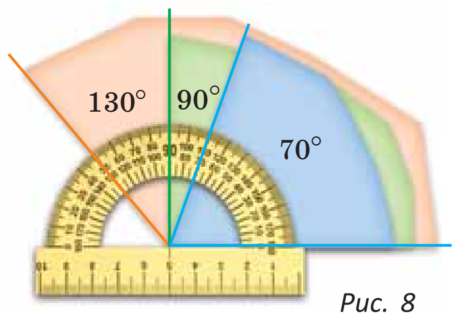



Рис. 8

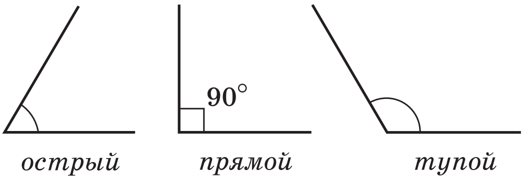



Рис. 9

рая получится, если из его вершины провести лучи, делящие развернутый угол на 180 равных частей. Углы измеряют при помощи транспортира (рис. 8). Транспортир также позволяет построить угол данной градусной меры.

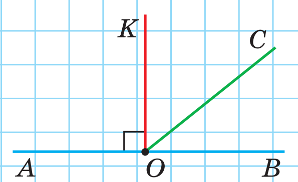
Виды углов: угол, меньший 90°, называется *острым*; равный 90°, — *прямым*; больший 90°, но меньший 180°, — *тупым* углом (рис. 9).

Неизвестный угол при решении задач иногда обозначают $x$ или $x°$. Буквами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... обозначают и угол, и его градусную меру.

А теперь выполните **Тест 2**.

**Тест 2**

Назовите все углы на рисунке и укажите их вид.




## 1.6. Параллельные и перпендикулярные прямые

На рисунке 10 прямые $a$ и $b$ имеют общую точку $M$. Точка $A$ принадлежит прямой $a$, но не принадлежит прямой $b$. Говорят, что прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке $M$. Это можно записать так: $A \in a$, $A \notin b$, $a \cap b = M$, где «$\in$» — знак прина-

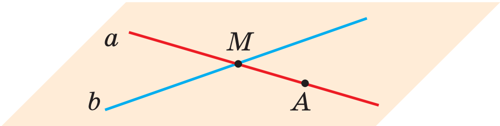
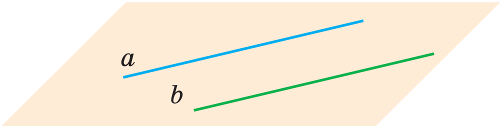
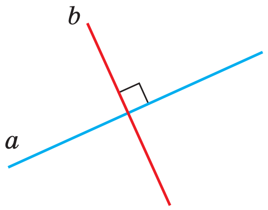



Рис. 10




*Параллельные прямые*

Рис. 11




*Перпендикулярные прямые*

*Рис. 12*

длежности точки прямой, «∩» — знак пересечения геометрических фигур.

На плоскости две прямые могут либо пересекаться, либо не пересекаться. Прямые на плоскости, которые не пересекаются, называются **параллельными**. Если прямые $a$ и $b$ параллельны (рис. 11, с. 11), то пишут $a \parallel b$.

Две прямые, которые при пересечении образуют прямой угол, называются **перпендикулярными** прямыми. Если прямые $a$ и $b$ перпендикулярны (рис. 12), то пишут $a \perp b$.

**ВАЖНО!**

Совпадающие прямые будем считать одной прямой. Поэтому, если сказано «даны две прямые», это означает, что даны две *различные* несовпадающие прямые. Это касается также точек, лучей, отрезков и других фигур.

Есть два способа практического сравнения длин отрезков, а также величин углов: 1) наложение; 2) сравнение результатов измерения. Оба способа являются приближенными. В геометрии отрезки и углы могут быть равны, если это дано по условию либо следует из условия на основании логических рассуждений.

## Задания к § 1

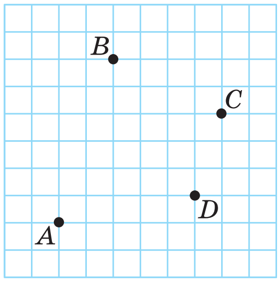



*Рис. 13*

1. Перенесите точки $A$, $B$, $C$ и $D$ в тетрадь, сохранив их расположение (рис. 13).
2. Определите по рисунку, пересекаются ли: а) отрезки $BC$ и $AD$; б) отрезки $AC$ и $BD$; в) прямые $BC$ и $AD$; г) лучи $CB$ и $AD$.
3. Отметьте точку $K$, в которой пересекаются прямые $BC$ и $AD$. При помощи транспортира определите величину угла $AKB$.
4. Постройте угол $BCF$, равный $60°$, и угол $DAM$, равный $120°$.
5. Проведите при помощи чертежного треугольника прямую $BH$, перпендикулярную прямой $AD$.

**6.** Постройте циркулем окружность с центром в точке $D$, радиус которой равен отрезку $DA$. Определите, какие из точек $A$, $B$, $C$, $D$, $K$ лежат на окружности, какие — внутри окружности, а какие — вне окружности.

***Примечание.*** В главах 1—4 все построения выполняются при помощи чертежных инструментов: линейки, чертежного треугольника, транспортира, циркуля. Горизонтальные (вертикальные) линии разметки в школьной тетради параллельны, горизонтальная и вертикальная линии перпендикулярны. Размеры одной клеточки 0,5 см на 0,5 см.

# § 2. Предмет геометрии

## 2.1. Основные фигуры

Основные геометрические фигуры — *точка*, *прямая* и *плоскость*. Это абстрактные математические понятия, которые принимаются без определения. Точка обозначается большой буквой, прямая — двумя большими или одной малой буквой латинского алфавита. Плоскость обозначается тремя большими буквами латинского или одной малой буквой греческого алфавита.

На рисунке 14 изображены точки $A$, $B$, $C$ и $M$, прямые $BC$ и $b$, плоскость $\alpha$ (альфа). Точка $A$ и прямая $BC$ принадлежат плоскости $\alpha$, точка $M$ принадлежит прямой $b$.

Школьный курс геометрии делится на планиметрию и стереометрию.

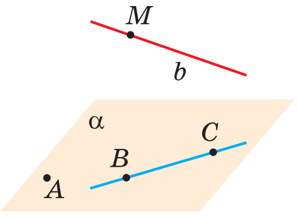



*Рис. 14*

## 2.2. Планиметрия и стереометрия

В *планиметрии* изучаются свойства плоских геометрических фигур, то есть тех, которые всеми своими точками могут быть расположены в одной плоскости. Это треугольник, квадрат, окружность и другие фигуры (рис. 15).

В *стереометрии* рассматриваются свойства пространственных геометрических фигур, которые не могут целиком располагаться в одной плоскости (рис. 16). Таких, например, как куб, прямоугольный параллелепипед, пирамида, шар.

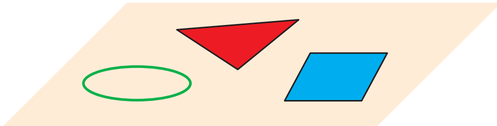


*Рис. 15*

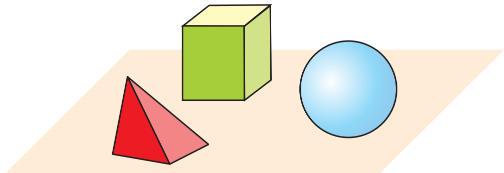


*Рис. 16*

В стереометрии также рассматриваются свойства точек, прямых и плоскостей в пространстве. Например, две прямые на плоскости либо пересекаются, либо не пересекаются, т. е. параллельны. В пространстве же существует еще один случай взаимного расположения двух прямых — это *скрещивающиеся* прямые. Они и не параллельны, и не пересекаются.

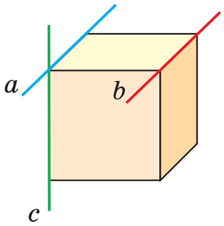



*Рис. 17*

На рисунке 17 изображены прямые $a$, $b$ и $c$, которые проходят через ребра куба. Прямые $a$ и $b$ параллельны. Прямые $a$ и $c$ пересекаются. Прямые $b$ и $c$ скрещиваются.

Геометрические фигуры называются *равными*, если их можно совместить наложением. Так как фигуры $A$ и $B$, изображенные на рисунке 18, совместились всеми своими точками, то это равные фигуры. Если сказано, что фигуры равны, то их можно полностью совместить друг с другом.

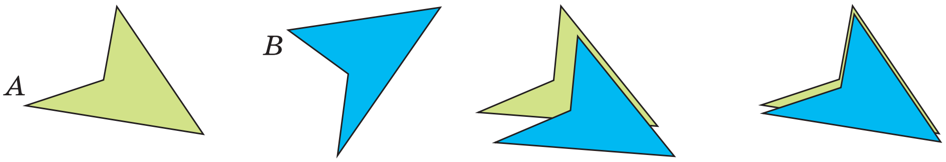



*Рис. 18*

Иногда для совмещения равных фигур, расположенных на плоскости, одну из них приходится перевернуть. Например, как фигуру $C$ на рисунке 19 для совмещения с равными ей фигурами $A$ и $B$.

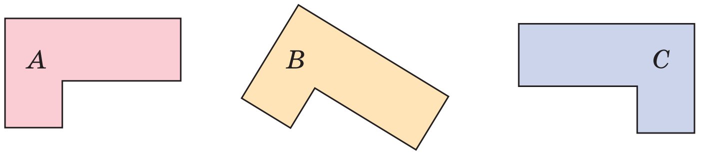



*Рис. 19*

## 2.3. Определения, аксиомы, теоремы

Все геометрические фигуры, кроме точки, прямой и плоскости, имеют *определения*. В определении указываются отличительные характеристики данной фигуры или взаимного расположения фигур. Определение обычно содержит либо слово ***называется***, либо слово ***это***. Например:

Определение. *Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками.*

Определение. *Равносторонний треугольник — это треугольник, у которого все стороны равны.*

Свойства фигур формулируются в виде аксиом и теорем.

*Аксиомами* называются утверждения об основных свойствах простейших фигур, не вызывающие сомнений.

*Теоремами* называются верные утверждения, справедливость которых устанавливается путем логических рассуждений, которые называются **доказательством**. Доказательство каждой теоремы опирается на аксиомы и ранее доказанные теоремы. Например:

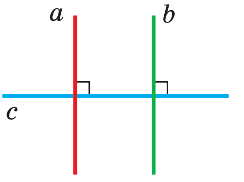
Аксиома. *Через любые две точки плоскости можно провести прямую, и притом только одну* (рис. 20).

*Аксиома*


*Рис. 20*

Теорема. *На плоскости две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны между собой* (рис. 21).

*Теорема*




*Если* $a \perp c$, $b \perp c$, *то* $a \parallel b$.

*Рис. 21*

> *Аксиома* — это утверждение, которое принимается без доказательства.

> *Теорема* — это утверждение, которое требует доказательства.

Кроме определений, аксиом и теорем, в геометрии есть *задачи*. Выделяют три основных типа задач: а) задачи на доказательство; б) задачи на вычисление; в) задачи на построение.

Задачи *на доказательство* похожи на теоремы. Теоремы описывают наиболее часто встречающиеся свойства фигур.

В задачах *на вычисление* нужно по некоторым известным числовым данным найти длину отрезка, величину угла, периметр, площадь фигуры, объем геометрического тела и т. д.

В задачах *на построение* необходимо найти способ построения какой-либо геометрической фигуры при помощи указанных чертежных инструментов.

Итак, геометрия изучает свойства фигур на плоскости и в пространстве. Свойства фигур выражены в виде аксиом и теорем. При решении задач ссылаются на определения, аксиомы и теоремы.

Такую геометрию создали древнегреческие ученые Фале́с, Архиме́д, Пифаго́р и др. Первым, кто систематизировал все математические знания того времени и изложил в большом научном труде под названием «Начала», был Евклид (III в. до н. э.). В течение длительного времени геометрию изучали по «Началам» Евклида.

<table>
<tr><th colspan="6">Геометрия</th></tr>
<tr><td colspan="3">Планиметрия</td><td colspan="3">Стереометрия</td></tr>
<tr><th colspan="6">Фигуры</th></tr>
<tr><td colspan="3">Неопределяемые<br>(точка, прямая, плоскость)</td><td colspan="3">Определяемые<br>(луч, отрезок, угол, ...)</td></tr>
<tr><th colspan="6">Свойства</th></tr>
<tr><td colspan="3">Аксиомы<br>(без доказательства)</td><td colspan="3">Теоремы<br>(доказательство)</td></tr>
<tr><th colspan="6">Задачи</th></tr>
<tr><td colspan="2">На доказательство</td><td colspan="2">На вычисление</td><td colspan="2">На построение</td></tr>
</table>

## Задания к § 2

### Проверяем знания

1. Кто из ученых первым изложил основы геометрии?
2. Какие три геометрические фигуры не имеют определения?
3. Что общего у аксиомы и теоремы и чем они различаются?
4. Какие геометрические фигуры называются равными?
5. Какие три типа геометрических задач вы знаете?

## Учимся строить чертеж

**1.** Изобразите прямую $a$ и отметьте на ней точки $A$ и $B$. Как по отношению к прямой $a$ и к отрезку $AB$ может быть расположена третья точка? Отметьте все возможные варианты.

**2.** На прямой $a$ отметьте точки $A$ и $B$. Вне прямой $a$ по разные стороны от нее отметьте точки $C$ и $D$ такие, чтобы ни точка $A$, ни точка $B$ не принадлежали прямой $CD$. Найдите точку пересечения прямой $CD$ и прямой $a$. Обозначьте ее буквой $P$. Сколько всего прямых задают пары отмеченных точек?

**3.** На прямой $b$ отметьте точки $E$, $G$ и $H$ такие, что точки $E$ и $H$ лежат по одну сторону от точки $G$, а точки $H$ и $G$ по одну сторону от точки $E$. Какая из точек лежит между двумя другими?

**4.** Изобразите прямые $m$ и $n$, которые пересекаются в точке $A$. На прямой $m$ отметьте точку $M$, на прямой $n$ — точку $N$. Проведите прямую $MN$. Сколько всего отрезков получилось на рисунке? Какую фигуру образуют эти отрезки? Проведите прямую $k$, которая пересекает прямые $m$, $n$ и $MN$ и не проходит через точки $A$, $M$ и $N$. Сколько теперь отрезков изображено на рисунке? На сколько частей указанные четыре прямые разбили плоскость?

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**1.** Перенесите в тетрадь пространственные фигуры, изображенные на рисунке 22 (невидимые ребра на чертеже изоб-

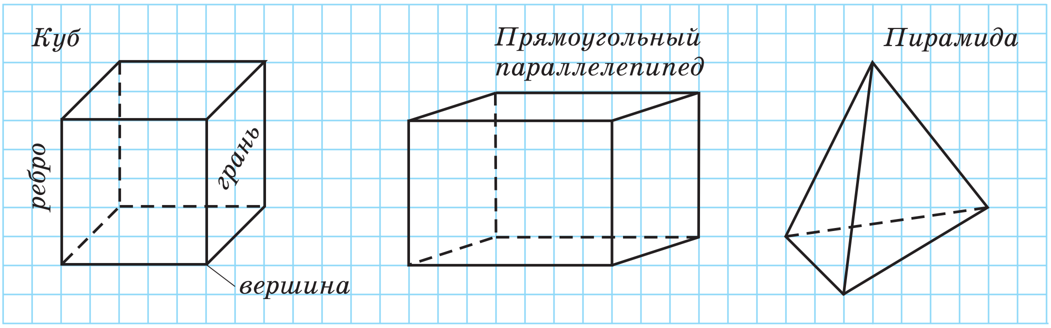



*Рис. 22*

ражаются штриховыми линиями). Вспомните, какими фигурами являются грани куба, грани прямоугольного параллелепипеда, грани треугольной пирамиды. Определите число вершин, ребер и граней для каждой фигуры.

**2.** Найдите площадь поверхности куба, если сумма длин всех его ребер равна 60 см, а площадь квадрата со стороной $a$ находится по формуле $S = a^2$.

**3.** Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его длина, ширина и высота соответственно равны 3 см, 4 см и 5 см, а площадь прямоугольника со сторонами $a$ и $b$ находится по формуле $S = ab$.


Если вам что-то непонятно, обратитесь к услугам **Интернета**, сделав запрос «прямоугольный параллелепипед».

***Гимнастика ума***

Определите, какая из фигур $B$, $C$ или $D$ равна фигуре $A$ (рис. 23).

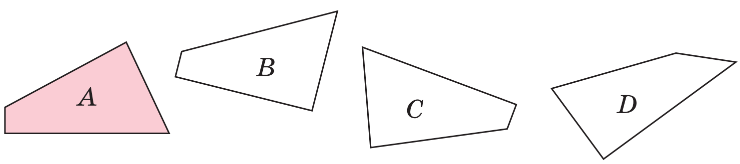



*Рис. 23*

# § 3. Прямая. Луч. Отрезок. Ломаная

## 3.1. Прямая

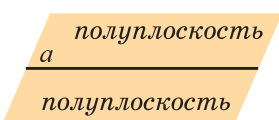



*Рис. 24*


*Рис. 25*

Прямая бесконечна (в обе стороны) и разбивает плоскость на две *полуплоскости* (рис. 24), для которых прямая является *границей*. Граница принадлежит полуплоскостям. На рисунке 25 точка $C$ лежит на прямой между точками $A$ и $B$, которые лежат по разные стороны от точки $C$. Точки $C$ и $B$ лежат по одну сторону от точки $A$. *Из трех точек на прямой одна и только одна точка лежит между двумя другими.*

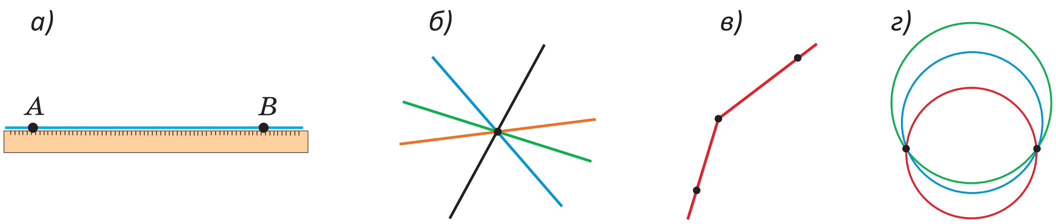



*Рис. 26*

Если на плоскости отметить две точки $A$ и $B$, то через них всегда можно провести прямую $AB$ (рис. 26, *а*). Через одну точку можно провести бесконечно много прямых (рис. 26, *б*), через три точки не всегда можно провести прямую (рис. 26, *в*). Через две точки можно провести бесконечно много окружностей (рис. 26, *г*), а прямую — только одну!

Аксиома прямой. **Через любые две точки плоскости можно провести прямую, и притом только одну.**

Из аксиомы следует, что если две прямые ($a$ и $b$) имеют общую точку ($M$), то это единственная общая точка (рис. 27). Если предположить, что существует еще одна общая точка ($K$), то тогда через две точки ($M$ и $K$) пройдут две прямые, что по аксиоме прямой невозможно.

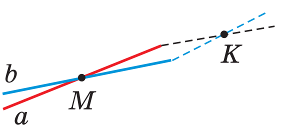



*Рис. 27*

Определение. Две прямые называются **пересекающимися**, если они имеют общую точку.

Определение. Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Если прямые $a$ и $b$ параллельны, то отрезки, изображающие эти прямые, никогда не пересекутся, сколько бы их ни продолжали (рис. 28).

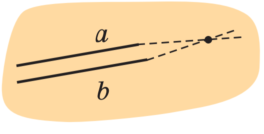



*Рис. 28*

## 3.2. Луч

Определение. **Лучом** называется часть прямой, ограниченная одной точкой.

Точка, ограничивающая луч, принадлежит лучу и называется *началом луча*. Луч бесконечен (в одну сторону). Он обозначается одной малой буквой, или двумя большими буквами, где первой всегда записывается начало луча. При этом вторая точка может быть не отмечена на луче. Она указывает направление луча, например как точка $B$ на луче $AB$ (рис. 29).

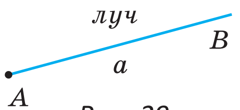


*Рис. 29*

Определение. Два луча называются **дополнительными** (противоположными), если они имеют общее начало и лежат на одной прямой.

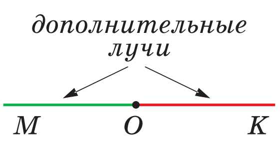


*Рис. 30*

На рисунке 30 изображены дополнительные лучи $OM$ и $OK$. Они дополняют друг друга до прямой. Чтобы построить луч, дополнительный данному, достаточно продлить данный луч за его начало вдоль прямой, на которой лежит данный луч. Любая точка прямой разбивает ее на два дополнительных луча.

## 3.3. Отрезок

Определение. **Отрезком** называется часть прямой, ограниченная двумя точками.

Точки, ограничивающие отрезок, принадлежат отрезку и называются концами отрезка, остальные точки отрезка — его внутренними точками. На рисунке 31 изображен отрезок $AB$ с концами $A$ и $B$. Точка $M$ — внутренняя точка отрезка $AB$.

*Рис. 31*

Если концы отрезка лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, то этот отрезок пересекает прямую, если в одной полуплоскости — то не пересекает. На рисунке 32 концы отрезка $AB$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой $a$, и он пересекает прямую $a$. Концы же отрезка $CD$ лежат в одной полуплоскости, и он не пересекает прямую $a$.

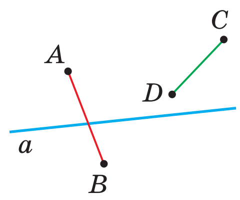


*Рис. 32*

Если при наложении отрезков их концы совпадут, то по аксиоме прямой эти отрезки совпадут всеми своими точками.

Определение. Два отрезка называются **равными**, если их можно совместить наложением.

Важной характеристикой отрезка является его *длина*. Свойства длины отрезка: каждый отрезок имеет длину, выраженную положительным числом; равным отрезкам соответствуют равные длины, большему отрезку — бо́льшая длина. И наоборот.

Аксиома измерения отрезков. **Если на отрезке взять точку, то она разобьет данный отрезок на два отрезка, сумма длин которых равна длине данного отрезка.**

Аксиома откладывания отрезков. **На любом луче от его вершины можно отложить отрезок данной длины, и притом только один.**

На рисунке 33 точка $C$ лежит на отрезке $AB$. По аксиоме измерения отрезков следует, что $AC + CB = AB$.

*Рис. 33*

*Серединой* отрезка называется точка, которая делит отрезок на два равных отрезка. На рисунке 34 точка $M$ — середина отрезка $EF$, то есть $EM = MF$.

*Рис. 34*

Определение. **Расстоянием между двумя точками** называется длина отрезка, соединяющего эти точки.

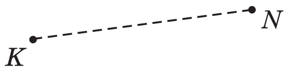


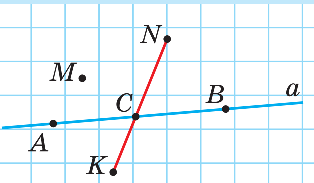
*Рис. 35*

На рисунке 35 расстояние между точками $K$ и $N$ равно длине отрезка $KN$.

А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

Расскажите о взаимном расположении прямой $a$ и точек, лучей и отрезков, изображенных на рисунке.




## 3.4. Ломаная

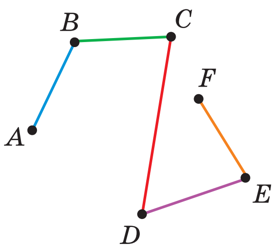


*Рис. 36*

На рисунке 36 отрезки $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ и $EF$ последовательно соединены своими концами: отрезок $BC$ соединен с отрезком $AB$, отрезок $CD$ соединен с отрезком $BC$ и так далее. Полученная фигура представляет собой ломаную $ABCDEF$. Указанные отрезки называются *звеньями* ломаной, а точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и $F$ — *вершинами* ломаной.

Определение. **Ломаной** называется геометрическая фигура, образованная отрезками, последовательно соединенными своими концами, у которой никакие два соседних звена не лежат на одной прямой. **Длиной ломаной** называется сумма длин ее звеньев.

Определение. Ломаная называется **замкнутой**, если начало ее первого звена совпадает с концом последнего. В противном случае она называется **незамкнутой**. Ломаная называется **простой**, если она не имеет самопересечений и никакие два ее звена, кроме соседних, не имеют общих точек. В противном случае она называется **непростой** (рис. 37).

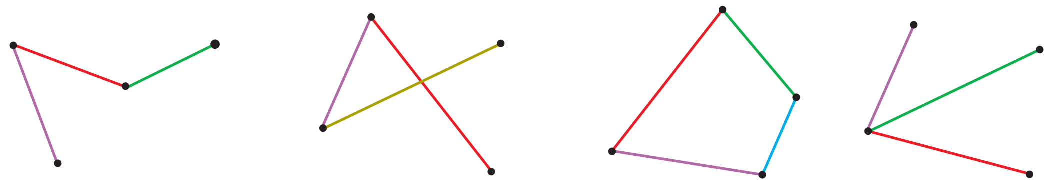
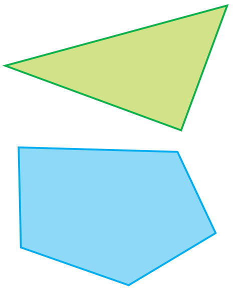



Рис. 37

Простая замкнутая ломаная на плоскости называется *многоугольником*. Звенья этой ломаной называются сторонами этого многоугольника, а вершины — вершинами многоугольника. *Периметром* многоугольника называется сумма длин его сторон. Часть плоскости, ограниченная многоугольником, называется *плоским* многоугольником. Слово «плоский» употреблять не будем. Отрезок, соединяющий вершины многоугольника, не принадлежащие одной стороне, называется его *диагональю*. Если у многоугольника три стороны, то у него три вершины и три угла, и он называется треугольником, если четыре стороны — четырехугольником, если пять — пятиугольником и так далее.



На рисунке 38 изображен четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB$, $BC$, $CD$ и $AD$. У него четыре угла: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ и две диагонали: $AC$ и $BD$. Периметр этого четырехугольника: $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$.

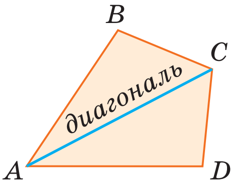



Рис. 38

При записи многоугольника его вершины записываются *последовательно*, начиная с любой вершины и в любом направлении. Например, $CBAD$ — это тот же четырехугольник $ABCD$.

Самые известные четырехугольники — это прямоугольник и квадрат. У прямоугольника все углы прямые, а противоположные стороны равны. Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны. На рисунке 39

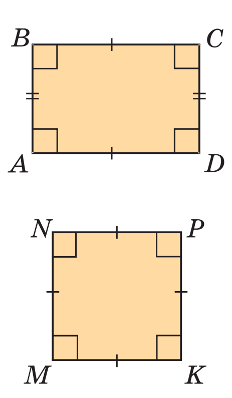


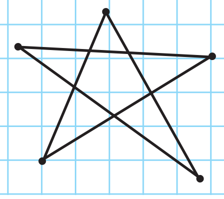

Рис. 39

$ABCD$ — прямоугольник, $MNPK$ — квадрат. Позже мы дадим определение прямоугольника и квадрата и рассмотрим их свойства подробно. А пока будем пользоваться указанными представлениями.

А теперь выполните **Тест 2**.

**Тест 2**

Какую ломаную представляет собой «звездочка» с вершинами в отмеченных точках?



## Задания к § 3

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

**ключевые задачи**

**Задача 1.** *На отрезке $AB$, равном 24 см, взята точка $C$. Отрезок $AC$ на 6 см больше отрезка $CB$. Найти длину отрезка $AC$.*


*Рис. 40*

Решение. Пусть $CB = x$ см, тогда $AC = (x + 6)$ см. По аксиоме измерения отрезков $AC + CB = AB$ (рис. 40). То есть $x + (x + 6) = 24$, $2x + 6 = 24$, $2x = 24 - 6$, $2x = 18$, $x = \frac{18}{2} = 9$, $AC = 9 + 6 = 15$ (см).

Ответ: 15 см.

*Замечание.* В дальнейшем при решении задач не будем ссылаться на аксиому измерения отрезков.

**Задача 2.** *На отрезке $AB$ отмечены точки $C$ и $D$* (рис. 41). *Найти длину отрезка $CD$, если: а) $AB = 36$ см, $AD = 23$ см, $BC = 19$ см; б) $AB = a$, $AD = b$, $BC = c$.*


*Рис. 41*

Решение. а) $DB = AB - AD = 36 - 23 = 13$ (см), $CD = BC - DB = 19 - 13 = 6$ (см);

б) Если сложить отрезки $AD$ и $BC$, то получим отрезок $AB$ плюс отрезок $CD$. Отсюда $CD = AD + BC - AB = b + c - a$.

Ответ: а) 6 см; б) $b + c - a$.

**Задача 3.** *На отрезке $AB$, равном 42 см, взята точка $M$. Найти расстояние между серединами отрезков $AM$ и $MB$.*

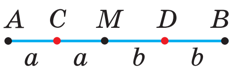



*Рис. 42*

Решение. Пусть $C$ — середина отрезка $AM$, $D$ — середина отрезка $MB$. Обозначим $AC = CM = a$, $MD = DB = b$ (рис. 42). Тогда $AB = 2a + 2b = 2(a + b)$, а $CD = a + b$. Следовательно, $CD = \frac{1}{2}AB = 21$ (см).

Ответ: 21 см.

*Замечание.* В данной задаче мы доказали свойство: «*Если на отрезке отмечена точка, то расстояние между серединами полученных отрезков равно половине данного отрезка*». Утверждения, которые будут доказаны нами в ключевых задачах, могут в дальнейшем использоваться как известные свойства.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**1.** Отметьте в тетради четыре точки $A$, $B$, $C$ и $D$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Изобразите прямые, которые можно провести через пары этих точек. Запишите эти прямые. Запишите лучи с началом в точке $B$.

**2.** На прямой отмечены точки $A$, $B$ и $C$ так, что $AB = 14$ см, $BC = 32$ см, $AC = 18$ см. Определите, какая из точек лежит между двумя другими.

**3.** а) На отрезке $AB$, равном 56 см, взята точка $M$. Отрезок $AM$ на 4 см меньше отрезка $MB$. Найдите длину отрезка $BM$.
б) Точка $P$ лежит на отрезке $EF$, равном 24 дм. Отрезок $EP$ в 3 раза больше отрезка $PF$. Найдите расстояние от середины отрезка $PF$ до точки $E$.

**4.** На отрезке $AB$ отмечены точки $K$ и $M$ так, что точка $K$ лежит между точками $A$ и $M$, $3AM = 2MB$, $AK = 2KM$, отрезок $AK$ на 12 см больше отрезка $KM$. Найдите расстояние между точками $A$ и $B$.

**5.** Даны три точки $A$, $B$ и $C$. Выясните, могут ли они лежать на одной прямой, если: а) $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $AC = 8$ см; б) $AB = 6{,}8$ дм, $BC = 12{,}3$ дм, $AC = 5{,}5$ дм.

**6.** Как называется каждая ломаная, изображенная на рисунке 43?

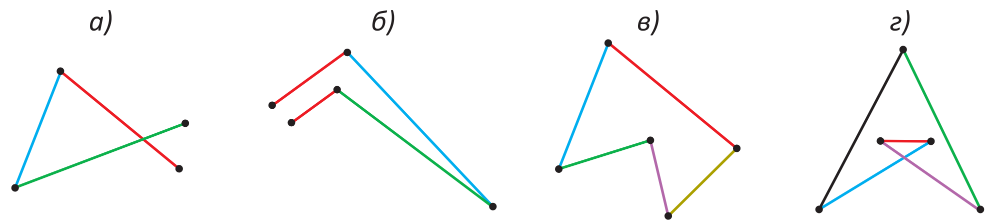



Рис. 43

**7.** Изобразите: а) трехзвенную простую незамкнутую ломаную; б) четырехзвенную простую замкнутую ломаную; в) пятизвенную непростую незамкнутую ломаную.

**8.** Дана пятизвенная ломаная. Каждое последующее звено, начиная со второго, в 2 раза больше предыдущего звена. Длина ломаной равна 186 см. Найдите длину самого большого ее звена.

**9.** Дана трехзвенная замкнутая ломаная $ABC$ (рис. 44). Точки $M$, $K$, $N$ — середины ее звеньев $AB$, $BC$ и $AC$. Точки $P$, $E$, $G$ — середины отрезков $MB$, $KC$ и $AN$. Найдите длину ломаной $ABC$, если: а) $PB + EC + GA = 12$ см; б) $AP + BE + CG = 108$ см.

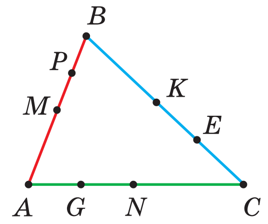



Рис. 44

**10*.** На отрезке $AB$ отмечены точки $M$ и $K$ так, что точка $M$ лежит между точками $A$ и $K$. Найдите расстояние между серединами отрезков $AM$ и $KB$, если: а) $AB = 32$ см, $MK = 12$ см; б) $AB = a$, $MK = b$.

**11*.** На прямой отмечены три точки. Где следует расположить четвертую точку, чтобы сумма расстояний до трех отмеченных точек была наименьшей? Решите данную задачу для четырех и для пяти отмеченных точек.

**12*.** На ребрах $MK$ и $KD$ куба взяты точки $E$ и $G$ (рис. 45). Из прямых $AD$, $MN$, $AM$, $NP$, $BC$ и $DC$ запишите те, которые пересекает прямая $EG$. Запишите все простые ломаные с концами в точках $A$ и $P$, звенья которых являются ребрами куба.

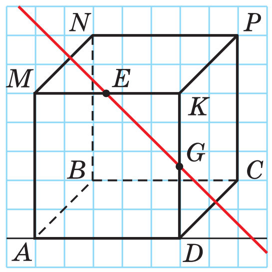



Рис. 45

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

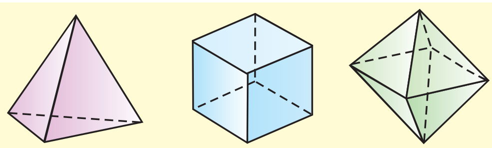
**Знаем**

1. Аксиому прямой.
2. Определение параллельных прямых.
3. Определение луча, дополнительных лучей.
4. Определение отрезка, равных отрезков; аксиому измерения отрезков.
5. Определение расстояния между точками.
6. Определение ломаной, замкнутой ломаной, простой ломаной.
7. Определение многоугольника, периметра многоугольника.

**Умеем**

1. Строить луч с началом в данной точке и луч, дополнительный данному.
2. Откладывать на луче от его начала отрезок данной длины при помощи линейки или циркуля.

## *Геометрия 3D*



*многогранники*

Геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называется *многогранником*. Многогранником является прямоугольный параллелепипед, все шесть его граней — прямоугольники (рис. 46). Длины трех его ребер, имеющих общую вершину, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда. Это его длина, ширина и высота. Например, $AD = a$, $DC = b$ и $DD_1 = c$ — измерения параллелепипеда. Объем прямоугольного параллелепипеда находится по формуле $V = abc$.

**Задача.** *У прямоугольного параллелепипеда (см. рис. 46) периметр грани* $AA_1D_1D$ *равен 20 см, грань* $ABCD$ *— квадрат с периметром 16 см. Найдите: а) длину пространственной ломаной* $ABCC_1D_1A_1$*; б) периметр и площадь грани* $DD_1C_1C$*; в) объем параллелепипеда.*

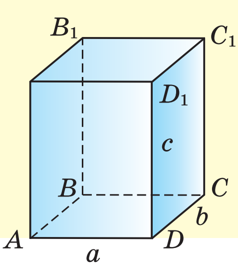



*Рис. 46*

### *Моделирование*

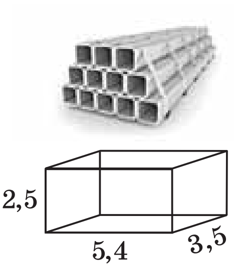
Самолет компании Белавиа совершил полет по маршруту Минск — Могилев — Гомель — Брест — Гродно — Витебск — Минск (рис. 47).

а) Определите примерную длину замкнутой ломаной этого маршрута, воспользовавшись картой Беларуси или **Интернетом**.

б*) Выясните, в какой из городов следует вылететь из Минска, чтобы последовательно посетив указанные города по часовой стрелке и вернувшись в Минск, получить самый короткий маршрут.


*Рис. 47*

### *Реальная геометрия*




Есть 12 металлических труб длиной 6 м каждая. Необходимо из этих труб сделать каркас для гаража в форме прямоугольного параллелепипеда шириной 3,5 м, длиной 5,4 м и высотой 2,5 м. Трубы разрезают на отрезки нужной длины и крепят по углам каркаса.

Определите: а) сколько труб пойдет на каркас гаража при самом экономном варианте разрезания; б*) сколько процентов от использованных труб уйдет на обрезку.

## § 4. Окружность и круг

Определение. **Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, которая называется *центром* окружности.

**Радиусом** окружности называется отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой на окружности (или длина этого отрезка).

**Хордой** окружности называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

**Диаметром** окружности называется хорда, проходящая через центр окружности.

**Дугой** окружности называется часть окружности, ограниченная двумя точками.

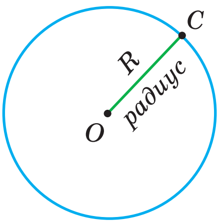



Рис. 48

На рисунке 48 точка $O$ — центр, отрезок $OC$ — радиус окружности. Радиус обозначают буквой $R$ (или $r$): $OC = R$. Из определения окружности следует, что все радиусы одной окружности равны между собой.

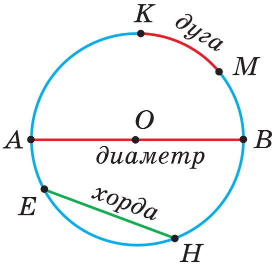



Рис. 49

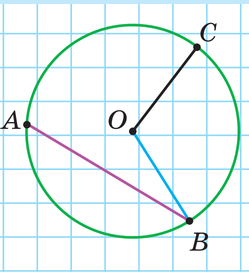
На рисунке 49 изображены: хорда $EH$, дуга $KM$ (обозначается: $\cup KM$), диаметр $AB$. Диаметр состоит из двух радиусов. Поэтому диаметры окружности равны между собой. Диаметр $AB$ состоит из радиусов $OA$ и $OB$, откуда $AB = OA + OB = 2OA$. Диаметр обозначают буквой $D$ (или $d$). Тогда $D = 2R$.

Любые две точки окружности разбивают ее на две дуги, которые дополняют друг друга до окружности. Эти дуги так и называются — *дополнительными*. Чтобы различать такие дуги, их иногда обозначают тремя буквами. На рисунке 49 дуги $AKM$ и $AHM$ — дополнительные.

А теперь выполните **Тест**.

**Тест**

Назовите элементы окружности, изображенные на рисунке. Какой элемент окружности не изображен? Сколько дуг окружности вы можете назвать?




Определение. **Кругом** называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

Точки окружности также принадлежат кругу (рис. 50). Поэтому центр, радиус, хорда и диаметр у круга те же, что и у его окружности.

Часть круга, заключенная между двумя радиусами, называется *сектором*. Часть круга, заключенная между дугой

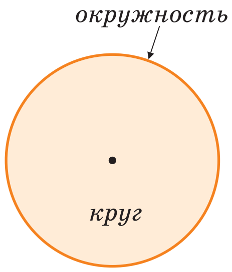



Рис. 50

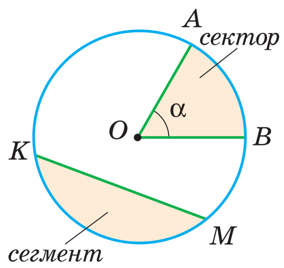



Рис. 51

окружности и хордой, соединяющей концы дуги, называется *сегментом* (рис. 51). Два радиуса разбивают круг на два сектора, хорда разбивает круг на два сегмента.

*Полуокружностью* называется дуга окружности, концы которой являются концами диаметра. *Полукругом* называется часть круга, ограниченная полуокружностью и диаметром, соединяющим концы полуокружности. На рисунке 49 дуга $AKB$ — полуокружность, сегмент $AKB$ — полукруг.

Угол, вершина которого находится в центре окружности, называется *центральным* углом. На рисунке 51 $\angle AOB = \alpha$ — центральный угол.

Окружности (круги) равны, если равны их радиусы.

Две окружности могут не иметь общих точек, могут пересекаться в двух точках или касаться друг друга в одной точке. Окружности разного радиуса с общим центром называются *концентрическими*. Часть плоскости между двумя концентрическими окружностями называется *кольцом* (рис. 52).

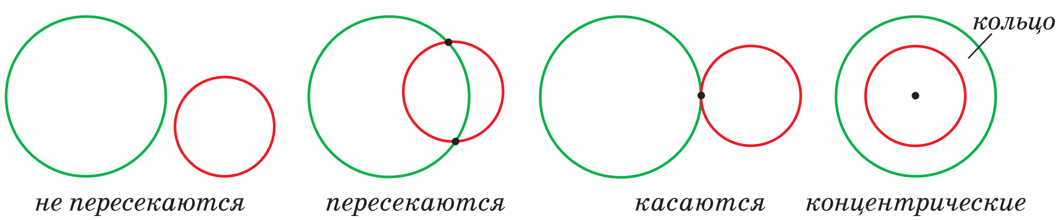



Рис. 52

## Задания к § 4

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**13.** На рисунке 53 изображены окружность и круг с центром в точке $O$. Укажите радиусы, хорды, диаметр, какие-нибудь три дуги окружности, один сектор и один сегмент круга.

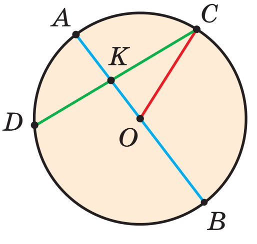



Рис. 53

**14.** Решите следующие задачи (см. рис. 53): а) Если $OC = 12{,}5$ см, то чему равна длина отрезка $AB$? б) Если $AB = 118$ см, то чему равно расстояние между точками $D$ и $O$? в) Если $AB + OC = 48$ см, то чему равна сумма $DO + OB$?

**15.** Диаметр окружности равен 35 см. Длины хорд $MK$ и $MN$ равны радиусу, центр $O$ окружности лежит внутри угла $KMN$. Найдите длину замкнутой ломаной $OKMN$.

**16.** Две окружности расположены так, что каждая проходит через центр другой окружности. Центры окружностей и точки их пересечения являются вершинами четырехугольника. Найдите периметр этого четырехугольника, если диаметр одной из окружностей равен 7 см.

**17.** Хорды $AB$, $BC$, $CD$ равны радиусу окружности с центром в точке $O$ и диаметром $AD$. Периметр четырехугольника $ABCD$ равен 60 см. Найдите диаметр окружности.

**18*.** Диаметр колеса велосипеда равен 64 см. Длина окружности $C$ находится по формуле $C = 2\pi R$, где $\pi = 3{,}1415...$, $R$ — радиус. Велосипедист проехал на велосипеде 100 м. Сколько полных оборотов сделало каждое колесо велосипеда? При решении используйте калькулятор.

**19*.** На отрезке $AB$ взята точка $C$, $AC = 6$ см. Известно, что отрезки $AB$ и $CB$ являются диаметрами окружностей. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

### *Реальная геометрия*

На любой шине от автомобиля есть маркировка, указывающая на ее размеры, например, 195/55 R16 (рис. 54). Число 195 означает ширину шины в мм. В данном случае ширина шины равна 195 мм или 19,5 см.

Второе число 55 означает высоту шины или высоту ее профиля, выраженную в процентах от ее ширины. В нашем случае это 55 % от 195 мм, то есть примерно 107 мм или 10,7 см.

И наконец надпись R16 обозначает внутренний диаметр шины, выраженный в дюймах. Так как 1 дюйм $\approx$ 2,54 см, то для нашей шины получим $16 \cdot 2{,}54$ см $\approx 40{,}64$ см.

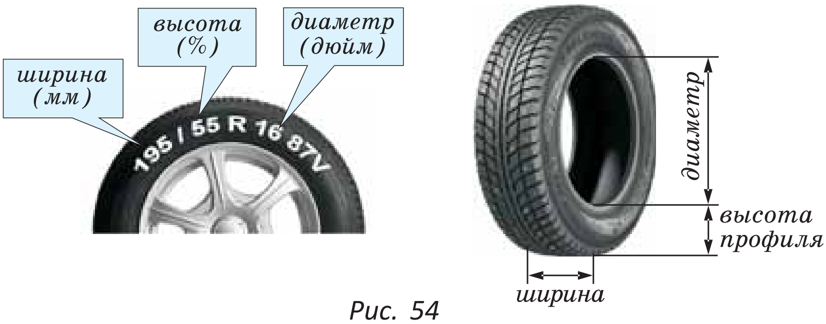



Рис. 54

**Задача.** На шине Artmotion Spike производства Белшина стоит маркировка **185/60 R15**. Определите ширину шины, высоту профиля, внутренний диаметр и примерную общую высоту колеса, то есть его наружный диаметр в сантиметрах.

***Интересно знать.*** Компания Белшина выпускает шины для легковых и грузовых автомобилей. На автобусах и троллейбусах Беларуси шины имеют надпись BELSHINA. На карьерных самосвалах БелАЗ также установлены шины этой белорусской компании. Высота такой шины достигает 3 м 75 см. Самосвал БелАЗ серии 75710 является самым большим в мире и занесен в книгу рекордов Гиннеса.

## Геометрия 3D

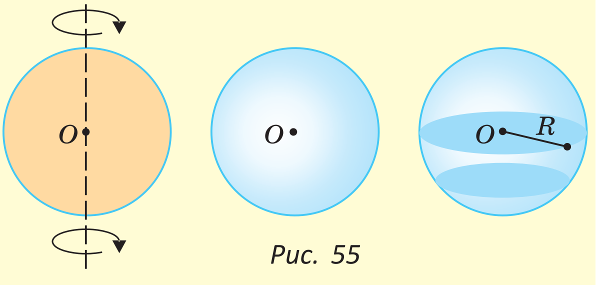



Рис. 55

Если круг вращать около своего диаметра, получим геометрическое тело, которое вы хорошо знаете, — *шар* (рис. 55). Он также имеет центр, радиус, диаметр. Поверхность шара называется *сферой*. Сфера — это оболочка шара. Расстояние от центра шара до любой точки сферы равно радиусу шара. Диаметр шара равен двум радиусам.

Если провести плоскость, пересекающую шар, то в сечении получим круг. Когда секущая плоскость будет проходить через центр шара, радиус $R$ полученного круга будет равен радиусу шара.

**Задача.** *Сумма расстояний от центра шара до трех точек на его поверхности равна 24 см. Найдите диаметр шара.*

## § 5. Угол. Виды углов

Определения. **Угол** — это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки, и частью плоскости, которую они ограничивают.
Два угла называются **равными**, если их можно совместить наложением.
**Биссектрисой угла** называется луч, который выходит из вершины угла и делит его на два равных угла.

Определение. **Развернутым** углом называется угол, стороны которого являются дополнительными лучами.

На рисунке 56 луч $AK$ — биссектриса угла $BAC$ и $\angle BAK = \angle CAK$.

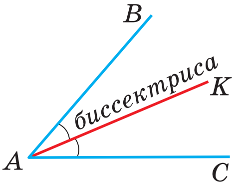


*Рис. 56*

На рисунке 57 угол $ABC$ — развернутый, лучи $BA$ и $BC$ — дополнительные. Другая (незакрашенная) полуплоскость относительно прямой $AC$ также задает развернутый угол $ABC$.

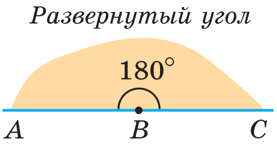


*Рис. 57*

Углы измеряются в градусах, минутах, секундах.

Развернутый угол равен 180°; $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла называется **градусом** и обозначается 1°; $\frac{1}{60}$ часть одного градуса называется **минутой** и обозначается $1'$; $\frac{1}{60}$ часть минуты называется **секундой** и обозначается $1''$.

Угол, равный 5 градусов 20 минут и 35 секунд, записывается так: $5°20'35''$.

Вместо «градусная мера угла равна 20°» часто говорят «угол равен 20°», вместо найти «градусную меру угла» говорят «найти угол».

А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

Найдите сумму и разность углов $\alpha$ и $\beta$, если
$\alpha = 62°50'30''$,
$\beta = 12°20'40''$.

**Определение.** Угол, равный 90°, называется **прямым**; угол, меньший 90°, — **острым**; угол, больший 90°, но меньший 180°, — **тупым**; угол, равный 360°, называется **полным** (его стороны совпадают).

На рисунке 58 последовательно изображены: острый угол, равный 60°; прямой угол, равный 90°; тупой угол, равный 120°; угол, равный 270°; и полный угол, равный 360°.

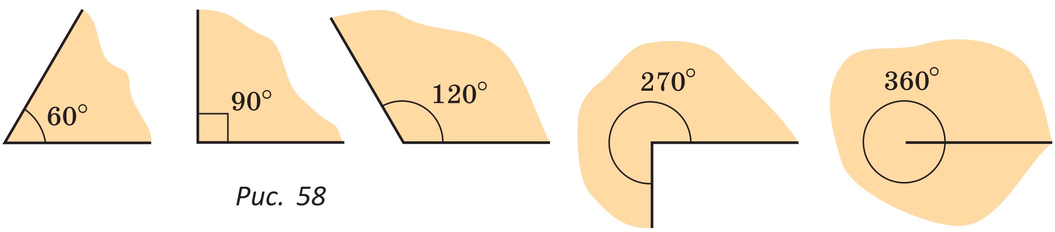
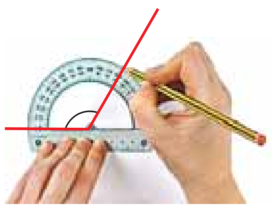


*Рис. 58*

Градусная мера угла является его важной характеристикой. С в о й с т в а  г р а д у с н о й  м е р ы  у г л а: любой угол имеет градусную меру, выраженную некоторым положительным числом; равным углам соответствуют равные градусные меры, а большему углу — большая градусная мера. И наоборот.



**Аксиома измерения углов.** **Если внутри угла из его вершины провести луч, то он разобьет данный угол на два угла, сумма градусных мер которых равна градусной мере данного угла.**

**Аксиома откладывания углов.** **От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол данной градусной меры, и притом только один.**

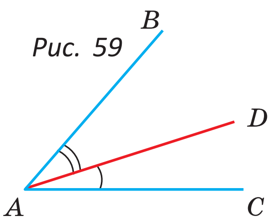


*Рис. 59*

На рисунке 59 луч $AD$ проходит внутри угла $BAC$. По аксиоме измерения углов $\angle BAD + \angle CAD = \angle BAC$. Например, если из вершины развернутого угла $AOB$ (рис. 60) провести луч $OC$, который составит со стороной $OB$

угол $50°$, то со стороной $OA$ луч $OC$ составит $180° - 50° = 130°$.

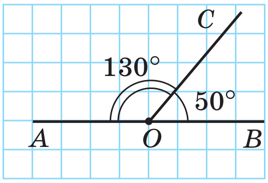


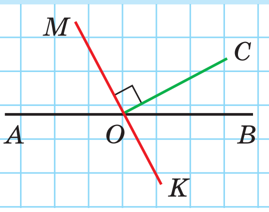

*Рис. 60*

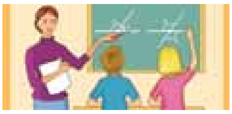
Два луча с общим началом задают на плоскости два угла. В дальнейшем будем рассматривать меньший из этих двух углов (если они неразвернутые). Такой угол меньше $180°$.

А теперь выполните **Тест 2**.

**Тест 2**

Сколько острых, тупых, прямых и развернутых углов можно насчитать на рисунке?



## Задания к § 5

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

**ключевые задачи**

**Задача 1.** *Внутри угла $BAC$, равного $114°$, из его вершины проведен луч $AE$. Угол $BAE$ в 2 раза больше угла $EAC$. Найти величину угла $BAE$.*

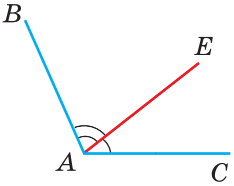



*Рис. 61*

Решение. Пусть $\angle EAC = x$. Тогда $\angle BAE = 2x$ (рис. 61). По аксиоме измерения углов $\angle BAE + \angle EAC = \angle BAC$. Тогда $x + 2x = 114°$, $3x = 114°$, $x = \frac{114°}{3} = 38°$, $\angle BAE = 2 \cdot 38° = 76°$.

Ответ: $76°$.

*Замечания.* 1. Возможен другой способ записи решения, когда рядом с буквой $x$ пишут знак градуса: $\angle MAC = x°$, $\angle BAM = 2x°$. Тогда в уравнении знак градуса писать не нужно: $x + 2x = 114$.

2. В дальнейшем при решении задач не будем ссылаться на аксиому измерения углов.

**Задача 2.** *Внутри угла проведены лучи $BD$ и $BF$* (рис. 62). *Найти величину угла $DBF$, если: а) $\angle ABC = 109°$, $\angle ABF = 95°$, $\angle CBD = 54°$; б) $\angle ABC = \alpha$, $\angle ABF = \beta$, $\angle CBD = \gamma$.*

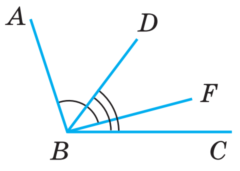



*Рис. 62*

Решение. а) $\angle FBC = \angle ABC - \angle ABF = 109° - 95° = 14°$, $\angle DBF = \angle CBD - \angle FBC = 54° - 14° = 40°$;
б) Если сложить углы $ABF$ и $CBD$, то получим угол $ABC$ плюс угол $DBF$. Отсюда $\angle DBF = \angle ABF + \angle CBD - \angle ABC = \beta + \gamma - \alpha$.
Ответ: а) 40°; б) $\beta + \gamma - \alpha$.

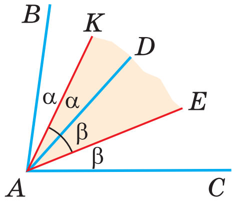



*Рис. 63*

**Задача 3*.** *Луч AD делит угол BAC на два угла BAD и CAD. Доказать, что угол между биссектрисами AK и AE углов BAD и CAD равен половине угла BAC* (рис. 63).

Доказательство. Так как $AK$ и $AE$ — биссектрисы, то $\angle BAK = \angle DAK = \alpha$, и $\angle CAE = \angle DAE = \beta$. Тогда $\angle BAC = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$, $\angle KAE = \alpha + \beta$. Следовательно, $\angle KAE = \frac{1}{2}\angle BAC$. Что и требовалось доказать.

*Замечание.* В данной задаче мы доказали свойство: «*Если внутри угла из его вершины провести луч, то угол между биссектрисами полученных углов равен половине данного угла*».

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**20.** На рисунке 64 изображены углы, равные 50°, 80°, 90°, 120°, 180°. Укажите эти углы.

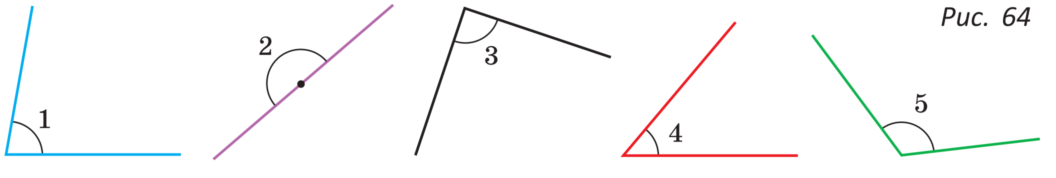



*Рис. 64*

**21.** Даны углы: 1°, 80°52′, 100°, 90°, 45°, 99°, 179°, 89°, 180°. Определите, сколько среди них: а) острых углов; б) тупых углов.

**22.** Известно, что $\angle BAC = 68°$, $AM$ — биссектриса угла $BAC$, $AK$ — биссектриса угла $MAC$. Найдите градусную меру угла $BAK$.

**23.** Внутри прямого угла $KMN$ проведены лучи $MA$ и $MB$, $\angle KMB = 72°$, $\angle AMN = 48°$. Найдите $\angle AMB$.

**24.** На рисунке 65 равные углы обозначены дугами, квадратиком — прямой угол. Найдите углы, обозначенные знаком вопроса.

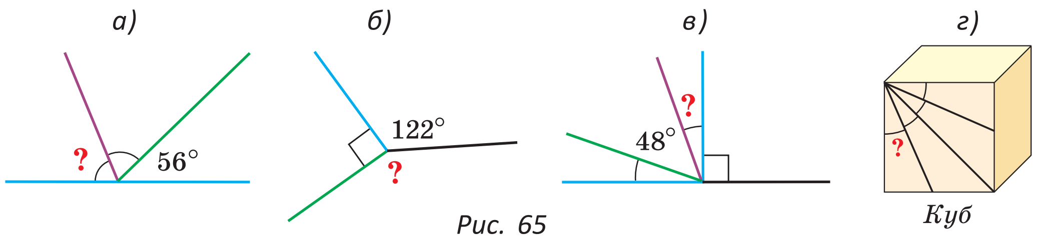



*Рис. 65*

**25.** Угол $BAC$ равен 130°. Луч $AK$ проходит внутри угла $BAC$ так, что угол $BAK$ на 30° меньше угла $CAK$. Найдите угол $BAK$.

**26.** Угол $NAK$ равен 48°. Луч $AB$ делит угол $NAK$ на два угла, причем $\angle NAB : \angle KAB = 3 : 5$. Найдите угол между биссектрисой угла $KAB$ и лучом $AN$.

**27.** Из точки $C$, взятой на прямой $AB$, в одну полуплоскость проведены лучи $CD$ и $CE$ так, что $\angle ACE = 156°$, а $\angle DCB$ — прямой. Найдите угол $DCE$.

**28*.** Определите, какой угол образуют часовая и минутная стрелки в 10 ч 10 мин (рис. 66).

**29*.** Внутри угла $AOB$ расположен угол $COD$ (рис. 67). Найдите угол между биссектрисами $OK$ и $OM$ углов $AOC$ и $BOD$, если: а) $\angle AOB = 160°$, $\angle COD = 40°$; б) $\angle AOB = \alpha$, $\angle COD = \beta$.

*Рис. 66*

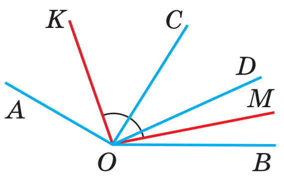



*Рис. 67*


При помощи **Интернета** выясните, как переводится слово «*градус*» и что еще, кроме углов, измеряют в градусах.

## *Моделирование*

Сектор для метания молота состоит из круглой площадки, обнесенной металлической сеткой, в которой есть свободный от сетки сектор, через который вылетает спортивный снаряд (рис. 68). Центральный угол этого сектора составляет 12,5 % от полного угла. Найдите угол $AOB$.

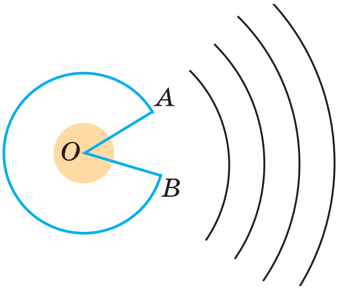



Рис. 68

***Интересно знать.*** Двукратный чемпион мира белорусский метатель молота Иван Тихон выиграл серебряную медаль на олимпийских играх в Рио-де-Жанейро в 2016 г.

## *Геометрия 3D*

В пространстве при пересечении двух плоскостей образуются *двугранные* углы. Две полуплоскости с общей границей являются гранями такого двугранного угла, а их граница — его ребром. Измеряется двугранный угол величиной *линейного* угла, образованного двумя лучами, проведенными в каждой из полуплоскостей из точки на ребре двугранного угла перпендикулярно этому ребру. На рисунке 69 $\angle ABC$ — линейный угол изображенного двугранного угла.

**Задача.** *Найдите величину двугранного угла, если его линейный угол составляет* 70 % *прямого угла.*

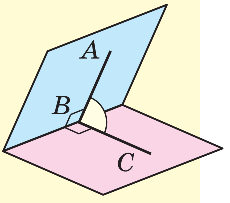
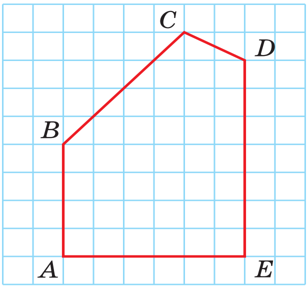



Рис. 69

## *Реальная геометрия*

Мастеру необходимо измерить углы между стенами в студии при помощи электронного угломера. Студия имеет форму пятиугольника. У мастера после измерения получились углы, равные $90°$, $135°$, $108°$, $117°$, $90°$.

Перенесите план студии, изображенный на рисунке, в тетрадь и определите при помощи транспортира все углы между соседними стенами сту-




дии. Запишите, чему равны углы $A$, $B$, $C$, $D$ и $E$. Выясните, не ошибся ли мастер при измерениях, если известно, что сумма углов любого пятиугольника равна 540°.

## § 6. Смежные углы. Вертикальные углы

Определение. Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

Если на рисунке 70 лучи $OA$ и $OB$ дополнительные, то углы $AOC$ и $BOC$ — смежные.

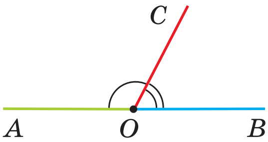



*Рис. 70*

Теорема (свойство смежных углов). **Сумма смежных углов равна 180°.**

Дано: $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.
Доказать: $\angle AOC + \angle BOC = 180°$.

Доказательство. Из определения смежных углов следует, что лучи $OA$ и $OB$ являются дополнительными и поэтому образуют развернутый угол $AOB$, равный 180°. Луч $OC$ проходит между сторонами этого угла, и по аксиоме измерения углов $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$. Поэтому $\angle AOC + \angle BOC = 180°$. Теорема доказана.

### Следствия.

1. *Если смежные углы равны, то каждый из них прямой.*
2. *Если два угла равны, то равны и смежные с ними углы.*

*Замечание.* Все теоремы курса геометрии 7—9 классов описывают свойства фигур на плоскости.

Определение. Два угла называются **вертикальными,** если стороны одного угла являются дополнительными лучами к сторонам другого.

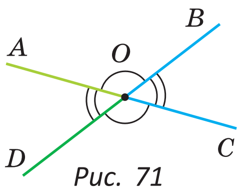


*Рис. 71*

При пересечении двух прямых $AC$ и $DB$ в точке $O$ (рис. 71) получим, что лучи $OA$ и $OC$, $OB$ и $OD$ — дополнительные. Поэтому углы $AOD$ и $BOC$ — вертикальные. Углы $AOB$ и $DOC$ также вертикальные.

Теорема (свойство вертикальных углов).
**Вертикальные углы равны.**

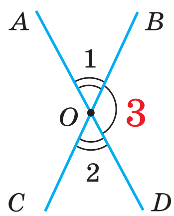


*Рис. 72*

Дано: $\angle 1$ и $\angle 2$ — вертикальные (рис. 72).
Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.
Доказательство. Углы 1 и 3 смежные, так как лучи $OA$ и $OD$ — дополнительные по определению вертикальных углов. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Углы 2 и 3 также смежные, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Так как $\angle 1 = 180° - \angle 3$, $\angle 2 = 180° - \angle 3$, то $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

*Углом между двумя пересекающимися прямыми* называется меньший из образованных ими углов. Если при пересечении прямых $AB$ и $CD$ (рис. 73) $\angle DOB = 30°$, то $\angle AOD = 180° - 30° = 150°$; $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle COB = \angle AOD$ как вертикальные. Угол между прямыми $AB$ и $CD$ равен 30°. Говорят, что прямые пересекаются под углом 30°.

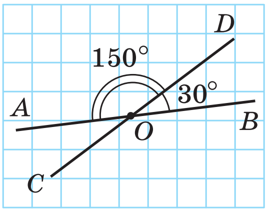
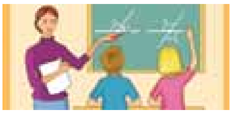


*Рис. 73*

При пересечении двух прямых образуются четыре угла (не считая развернутых). Если один из них 90°, то и остальные по 90° (докажите самостоятельно). Говорят, что прямые пересекаются под прямым углом.

Угол между параллельными прямыми считается равным 0°.



# Задания к § 6

## РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *Смежные углы относятся как 2 : 3. а) Найти величину каждого из углов. б) Определить, сколько процентов развернутого угла составляет меньший угол.*

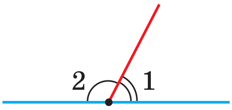



Рис. 74

Решение. а) Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ — данные смежные углы (рис. 74). Согласно условию $\angle 1 = 2x$, $\angle 2 = 3x$ (градусную меру одной части принимаем за $x$). По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то есть $2x + 3x = 180°$, $5x = 180°$, $x = \frac{180°}{5} = 36°$, $\angle 1 = 2 \cdot 36° = 72°$; $\angle 2 = 180° - 72° = 108°$.

б) Меньшим является $\angle 1$, а $72°$ от $180°$ составляют $\frac{72}{180} \cdot 100\,\% = \frac{2}{5} \cdot 100\,\% = 40\,\%$.

Ответ: $72°$, $108°$; $40\,\%$.

**Задача 2.** *а) Найти угол между биссектрисами OK и OM смежных углов BOC и AOC* (рис. 75), *если $\angle BOC = 70°$. б) Доказать, что биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.*

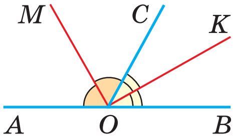



Рис. 75

Решение. а) Если $\angle BOC = 70°$, то $\angle AOC = 180° - 70° = 110°$; $\angle COK = 35°$, $\angle COM = 55°$; $\angle MOK = 35° + 55° = 90°$.

б) Так как $OM$ и $OK$ — биссектрисы, то $\angle COM = \frac{1}{2}\angle AOC$, $\angle COK = \frac{1}{2}\angle BOC$. Найдем градусную меру $\angle MOK$: $\angle MOK = \angle COM + \angle COK = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOC)$. По свойству смежных углов $\angle AOC + \angle BOC = 180°$. Тогда $\angle MOK = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Что и требовалось доказать.

*Замечание.* Можно было сослаться на ключевую задачу 3* к § 5.

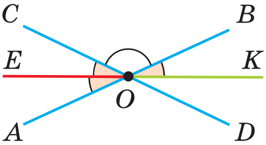



Рис. 76

**Задача 3*.** *Доказать, что биссектрисы вертикальных углов образуют развернутый угол.*

Решение. а) Пусть $OE$ и $OK$ — биссектрисы вертикальных углов $AOC$ и $BOD$ (рис. 76). Докажем, что $\angle EOK$ — развернутый. Известно, что

биссектриса делит угол пополам. Так как вертикальные углы равны, то равны и их половины. Поэтому $\angle AOE = \angle BOK$.
б) $\angle AOE + \angle EOC + \angle COB = 180^\circ$, так как лучи $OA$ и $OB$ дополнительные, и поэтому $\angle AOB$ — развернутый. Заменив в последнем равенстве $\angle AOE$ на равный ему $\angle BOK$, получим $\angle BOK + \angle EOC + \angle COB = 180^\circ$. Отсюда следует, что $\angle EOK$ — развернутый.

*Замечание.* Из решения задачи следует свойство: если $\angle AOB$ — развернутый и $\angle AOE = \angle BOK$, то $\angle AOE$ и $\angle BOK$ — вертикальные.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**30.** Один из смежных углов равен: а) $40^\circ$; б) $75^\circ$; в) $140^\circ 20'$. Найдите другой угол.

**31.** На рисунке 77 лучи $OK$ и $OM$ — дополнительные, угол $MON$ на $70^\circ$ больше угла $NOK$. Найдите $\angle MON$.

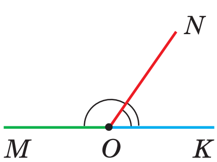



Рис. 77

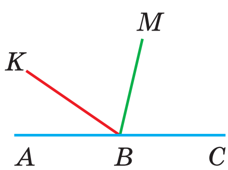



Рис. 78

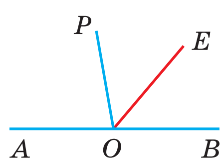



Рис. 79

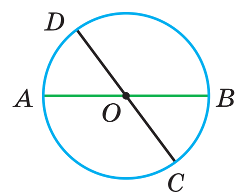



Рис. 80

**32.** На рисунке 78 $\angle ABM = 100^\circ$, $\angle CBK = 155^\circ$. Найдите $\angle KBM$.

**33.** На рисунке 79 $\angle AOP : \angle BOP = 4 : 5$. Найдите угол между биссектрисой $OE$ угла $BOP$ и лучом $OA$.

**34.** На рисунке 80 $AB$ и $CD$ — диаметры окружности, угол $AOD$ составляет $\frac{1}{2}$ угла $AOC$. Найдите угол $BOD$.

**35.** Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен: а) $20^\circ$; б) $110^\circ$; в) $90^\circ$. Найдите остальные три угла.

**36.** Найдите углы 1, 2, 3 и 4 (рис. 81).

**37.** На рисунке 82 $\angle 1 + \angle 3 = 250^\circ$. Найдите $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

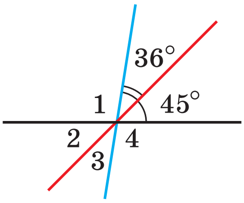



*Рис. 81*

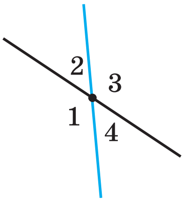



*Рис. 82*

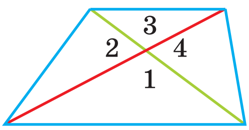



*Рис. 83*

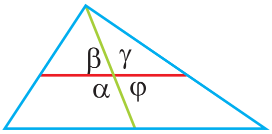



*Рис. 84*

**38.** Сумма углов 1, 2 и 3 равна 297° (рис. 83). Найдите сумму углов 2, 3 и 4.

**39.** Известно, что $2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 900°$ (рис. 84). Найдите угол $\varphi$ (фи).

**40.** При пересечении двух прямых образовались четыре угла. Известно, что один из этих углов в 5 раз меньше суммы трех остальных. Найдите угол между этими прямыми.

**41.** Прямоугольный лист картона обрезан под углом 38° к его большей стороне (рис. 85). На рисунке *A* показана отрезанная часть. На каком из рисунков *B*, *C* или *D* изображена другая часть листа?

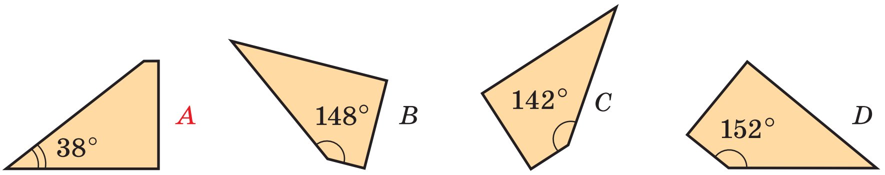



*Рис. 85*

**42*.** Найдите сумму углов 1, 2 и 3 (рис. 86).

**43*.** После того как один из смежных углов увеличили на 40 %, другой угол уменьшился на 60 %. Найдите, какими были по величине первоначально два данных смежных угла.

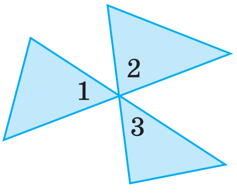



*Рис. 86*

**44*.** Через одну точку на плоскости проходят четыре прямые, которые делят плоскость на 8 углов, три из которых относятся как 1 : 2 : 3, а один из углов равен сумме трех указанных. Найдите каждый угол.

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Определения: угла, равных углов, биссектрисы угла, развернутого угла, градуса.
2. Какой угол называется прямым, острым, тупым, полным.
3. Аксиому измерения углов.
4. Свойство смежных углов. Свойство вертикальных углов.

**Умеем**

1. Доказывать свойство смежных углов.
2. Доказывать свойство вертикальных углов.
3. Откладывать при помощи транспортира угол, равный данному.

### *Моделирование*

Вырежьте из бумаги угол, равный 40°. При помощи перегибания бумаги получите угол, равный: а) 10°; б) 30°; в) 140°; г) 35°.

Исследуйте, какие углы, измеряющиеся целым числом градусов, можно получить из данного угла путем складывания.

### *Гимнастика ума*

Семиклассник стоит лицом к учителю физкультуры. Учитель дал учащемуся команду повернуться 7 раз налево, 8 раз направо и 9 раз кругом. Как теперь по отношению к учителю стоит ученик: а) левым боком; б) правым боком; в) спиной; г) лицом?

## § 7. Перпендикулярные прямые

Определение. Две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

При пересечении двух перпендикулярных прямых образуются 4 прямых угла.

Отрезки и лучи называются перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых. На рисунке 87 прямые $m$ и $n$ перпендикулярны (иногда говорят «взаимно перпендикулярны»), то есть $m \perp n$. Тогда перпендикулярны отрезки $AB$ и $CD$, лучи $BA$ и $CD$, так как лежат на перпендикулярных прямых, отрезок $AB$ и прямая $n$, так как они лежат на перпендикулярных прямых.

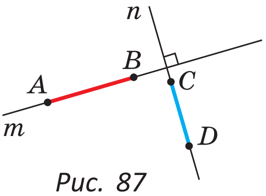


*Рис. 87*

**Определение.** **Перпендикуляром** к данной прямой называется отрезок, который лежит на прямой, перпендикулярной данной, один из концов которого (*основание перпендикуляра*) является точкой пересечения этих прямых.

Прямая $b$ перпендикулярна прямой $a$ (рис. 88). Отрезок $AB$ — перпендикуляр к прямой $a$, точка $B$ — основание перпендикуляра. Точку $B$ также называют *проекцией* точки $A$ на прямую $a$.

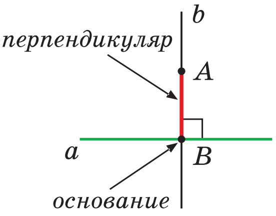


*Рис. 88*

Если из точки $M$, которая не лежит на прямой $a$, провести перпендикуляр $MK$ к прямой $a$ (рис. 89), то получим *перпендикуляр, опущенный из точки $M$ на прямую $a$*. Если из точки $P$, лежащей на прямой $a$, провести перпендикуляр $PE$ к прямой $a$ (рис. 90), то получим перпендикуляр, *восстановленный* (*восставленный*) *к прямой $a$*.

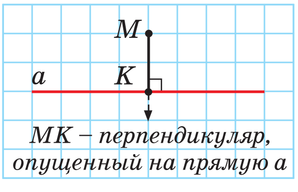


*Рис. 89*

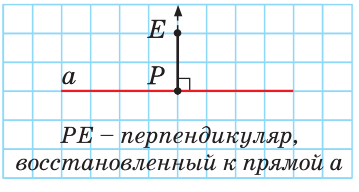


*Рис. 90*

**Теорема.** **Через точку, лежащую на данной прямой, можно провести прямую, перпендикулярную этой прямой, и только одну.**

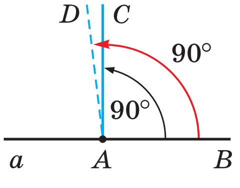


*Рис. 91*

Дано: прямая $a$; точка $A$; $A \in a$ (рис. 91).
Доказать: через точку $A$ можно провести прямую, перпендикулярную прямой $a$, и только одну.

Доказательство. По аксиоме откладывания углов от луча $AB$ в данную полуплоскость можно отложить угол $CAB$, равный $90°$, и притом только один. Тогда прямая $AC$ перпендикулярна прямой $a$. Предположим, что существует другая прямая $AD$, проходящая через точку $A$ и перпендикулярная прямой $a$. Тогда $\angle DAB = 90°$ и от луча $AB$ в данную полуплоскость будут отложены два угла, равные $90°$: $\angle CAB$ и $\angle DAB$. А это невозможно по аксиоме откладывания углов. Следовательно, не существует другой прямой, проходящей через точку $A$ и перпендикулярной прямой $a$.

Теорема. **Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, перпендикулярную этой прямой, и притом только одну.**

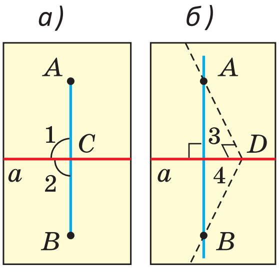


*Рис. 92*

Дано: прямая $a$; точка $A$, $A \notin a$ (рис. 92).
Доказать: через точку $A$ можно провести прямую, перпендикулярную прямой $a$, и притом только одну.

Доказательство*. 1) Вначале докажем, что через точку $A$ *можно* провести прямую, перпендикулярную прямой $a$. Мысленно перегнем лист с чертежом по прямой $a$ (совместим верхнюю полуплоскость с нижней, повернув ее вокруг прямой $a$) (рис. 92, *а*). Точка $A$ займет некоторое положение, которое обозначим точкой $B$. Вернем полуплоскости в прежнее положение и проведем прямую $AB$. Так как углы 1 и 2 совпадают при наложении полуплоскостей, то они равны. А поскольку эти углы смежные, то каждый из них равен $90°$ и $AB \perp a$.

2) Теперь докажем, что $AB$ — *единственная* прямая, проходящая через точку $A$ и перпендикулярная прямой $a$. Пусть прямая $AD$ также перпендикулярна прямой $a$. Тогда $\angle 3 = 90°$ (рис. 92, *б*). Совместим полуплоскости еще раз. Угол 3 совпадет с углом 4, значит $\angle 4 = 90°$. Тогда $\angle ADB$ — развернутый, и через точки $A$ и $B$ будут проходить две прямые: ранее проведенная прямая и прямая, проходящая через точки $A$, $D$ и $B$. А это невозможно по аксиоме прямой. Следовательно, прямая $AD$ не перпендикулярна прямой $a$. Теорема доказана.

Из двух последних теорем следует, что на плоскости через любую точку можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой, и притом только одну.

> Теорема (о двух прямых, перпендикулярных третьей). **На плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.**

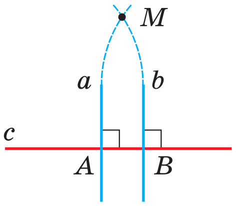


*Рис. 93*

Дано: $a \perp c$, $b \perp c$ (рис. 93).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство. Если предположить, что прямые $a$ и $b$ пересекаются в некоторой точке $M$, то окажется, что через точку $M$ проходят две прямые $a$ и $b$, перпендикулярные третьей прямой $c$, а это невозможно. Значит, прямые $a$ и $b$ лежат в одной плоскости и не пересекаются, то есть параллельны между собой. Теорема доказана.

## Задания к § 7

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

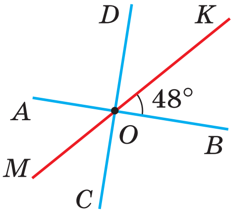


*Рис. 94*

**45.** На рисунке 94 $AB \perp CD$, $\angle KOB = 48°$. Найдите: а) $\angle COM$; б) $\angle MOD$.

**46.** Угол $BAC$ равен 40°. Из точки $A$ проведен луч $AK$, перпендикулярный лучу $AB$, точки $K$ и $B$ лежат по разные стороны относительно прямой $AC$. Найдите, какой угол образует биссектриса угла $CAK$ с лучом $AB$.

**47.** Прямые $a$ и $b$ перпендикулярны. Через точку их пересечения проведена прямая $c$. Определите число получившихся при этом тупых углов.

**48.** На рисунке 95 $AB \perp AK$, $\angle 2 : \angle 1 = 7 : 9$, $AM$ — биссектриса угла $BAK$. Найдите угол $MAC$.

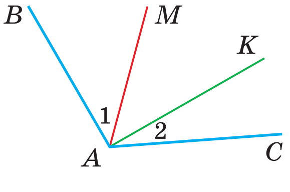


*Рис. 95*

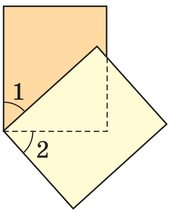


*Рис. 96*

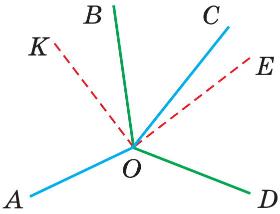


*Рис. 97*

**49.** Две прямоугольные открытки имеют общую вершину (рис. 96). Докажите, что углы 1 и 2 равны.

**50*.** Сумма углов $AOD$ и $BOC$ равна 180°, $OK$ — биссектриса угла $AOC$, $OE$ — биссектриса угла $BOD$ (рис. 97). Докажите, что $OK \perp OE$.

## Теорема, обратная данной*

Формулировка теоремы, как правило, состоит из двух частей: того, что дано, и того, что нужно доказать. Первая часть называется условием теоремы, вторая — заключением. Часто теорему формулируют в форме: «Если ...(условие теоремы), то ...(заключение теоремы)». Например, теорему о свойстве смежных углов можно сформулировать так: «Если углы смежные, то сумма этих двух углов равна 180°». «Углы смежные» — это условие теоремы, «сумма этих двух углов равна 180°» — заключение.

Если поменять условие и заключение теоремы местами, то получим утверждение, обратное данному. Для указанной выше теоремы получаем: «Если сумма двух углов равна 180°, то эти углы смежные». Но это утверждение неверно, поскольку можно привести пример двух углов, например, равных 60° и 120°, сумма которых 180°, но которые не являются смежными. Значит, приведенное утверждение не является теоремой.

Если же верно и обратное утверждение, то оно называется *теоремой, обратной данной*. Например, известна теорема: «Если сумма цифр числа делится на 3, то и число делится на 3» — и ей обратная: «Если число делится на 3, то и сумма цифр числа делится на 3».

Иногда прямую и обратную теоремы объединяют, употребляя при этом выражение «тогда и только тогда». Объединим вышеуказанные теоремы: «Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3».

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Определение перпендикулярных прямых.
2. Определение перпендикуляра к прямой.
3. Теорему о прямой, перпендикулярной данной.
4. Свойство двух прямых, перпендикулярных третьей.

**Умеем**

1. При помощи чертежного треугольника: а) опускать из точки, не лежащей на прямой, перпендикуляр на данную прямую; б) из точки, лежащей на прямой, восстанавливать перпендикуляр данной длины к данной прямой.
2. Доказывать теорему о двух прямых, перпендикулярных третьей.

## Геометрия 3D

Пусть в пространстве прямая $n$ пересекает плоскость $\alpha$ в точке $B$ (рис. 98). Если прямая $n$ перпендикулярна любой прямой плоскости, проходящей через точку $B$, то она называется прямой, перпендикулярной плоскости. Пишут $n \perp \alpha$. Отрезок $AB$ называется *перпендикуляром к плоскости* $\alpha$.

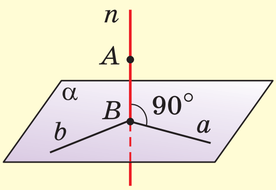


Рис. 98

Чтобы прямая $n$ была перпендикулярна плоскости $\alpha$, достаточно, чтобы она была перпендикулярна каким-то двум прямым плоскости, проходящим через точку $B$. Например, прямым $a$ и $b$.

**Задача.** *Укажите в окружающей вас обстановке перпендикуляры к каким-либо плоскостям.*

## Моделирование

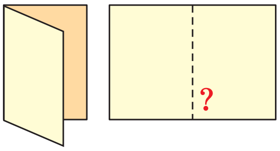


Рис. 99

а) Перегните прямоугольный лист бумаги так, чтобы совпали края листа. Распрямите лист (рис. 99). Объясните, почему линия перегиба перпендикулярна краю листа.

б) На листе бумаги изображена прямая $a$ и точка $A$ (рис. 100). Используя только перегибание бумаги, проведите из точки перпендикуляр к прямой.

Предлагается следующее решение: 1) перегибаем лист по прямой $a$ так, чтобы точка $A$ была видимой; 2) прокалываем обе сложенные части через точку $A$ и получаем на другой части листа точку $B$; 3) распрямляем лист; 4) складываем лист по прямой, проходящей через точки $A$ и $B$.

Объясните, почему $AB \perp a$.

Предложите свой способ, связанный с пунктом а).

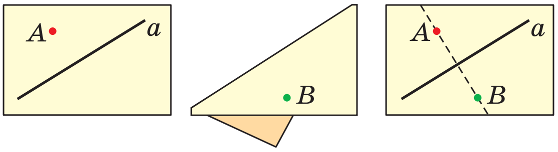


Рис. 100

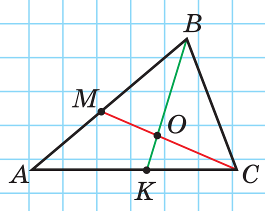
## ЗАПОМИНАЕМ

1. Сумма смежных углов равна 180°.
2. Вертикальные углы равны.
3. На плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.
4. На плоскости через любую точку можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой, и притом только одну.

## Проверяем себя

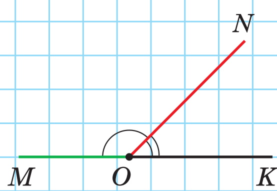
### Тест 1

Выпишите все пары смежных углов, все пары вертикальных углов, изображенные на рисунке.



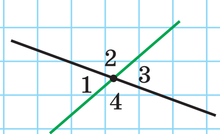

### Тест 2

$\angle NOK$ в 3 раза меньше $\angle MON$. Найдите угол между биссектрисой угла $MON$ и лучом $OK$.




### Тест 3

Для углов 1, 2, 3 и 4 сумма каких-то двух из них на 100° больше суммы двух оставшихся. Найдите углы 1, 2, 3 и 4.



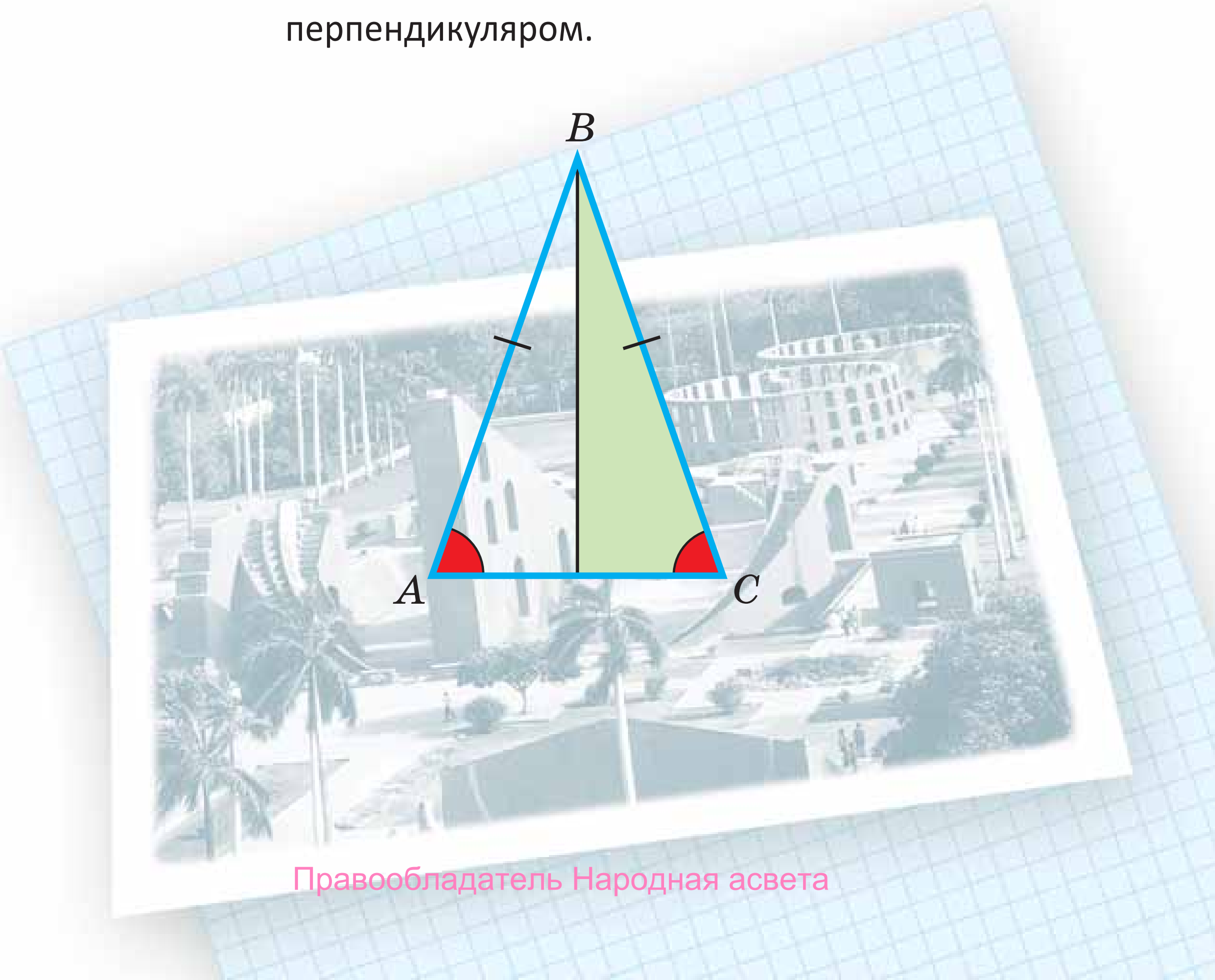

Дополнительные материалы к главе можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, курс «Математика» — «Математика. 7 класс», модуль «Начальные понятия геометрии».

Глава II

# Признаки равенства треугольников

**В этой главе вы узнаете:**

- Как определить, равны ли два треугольника.
- Что такое медиана треугольника.
- Какая прямая называется серединным перпендикуляром.



# § 8. Треугольники

## 8.1. Треугольник

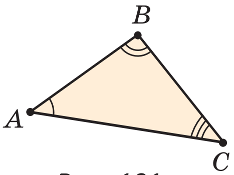



*Рис. 101*

Если на плоскости отметить три точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой, и соединить их отрезками, то получим треугольник $ABC$. Можно сказать, что треугольник — это трехзвенная замкнутая ломаная. Обозначают: $\triangle ABC$, где $AB$, $BC$ и $AC$ — стороны, точки $A$, $B$ и $C$ — вершины, $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — углы треугольника (рис. 101). Чтобы найти периметр треугольника, нужно сложить длины его сторон: $P_{ABC} = AB + BC + AC$. Треугольником также считают и часть плоскости, ограниченную замкнутой ломаной $ABC$.

Определение. **Треугольником** называется трехзвенная замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, которую она ограничивает.

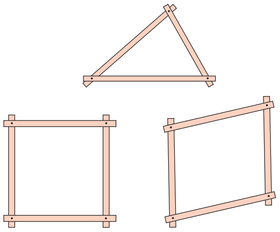


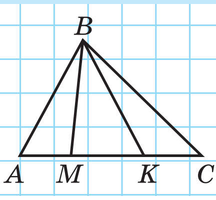
*Рис. 102*

Если соединить концами три деревянных планки, то получится треугольник, который нельзя подвергнуть деформации — он будет сохранять свою форму. Тогда как четырехугольник может менять свою форму (рис. 102)? Это свойство «жесткости» треугольника широко используется в технике, производстве, строительстве.

А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

Сколько всего треугольников можно назвать на рисунке?



## 8.2. Равные треугольники

*Равные* треугольники можно совместить наложением так, что соответственно совпадут все три стороны и все три угла (рис. 103). В совпавших, то есть в равных треугольниках, против *равных сторон лежат равные углы, а против равных углов — равные стороны*. Если $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ и $AB = A_1B_1$, то $\angle C = \angle C_1$, а если $\angle B = \angle B_1$, то $AC = A_1C_1$.

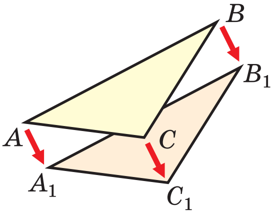


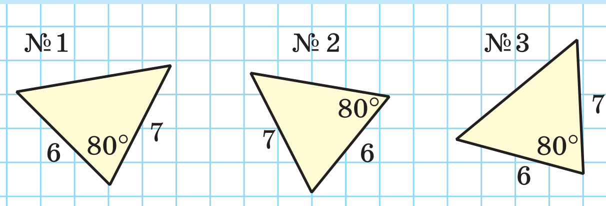
Рис. 103

Для совмещения равных отрезков достаточно совпадения их концов, а для совмещения равных треугольников — совпадения их вершин.

А теперь выполните **Тест 2**.

**Тест 2**

Какие треугольники, по вашему мнению, можно совместить наложением?




## 8.3. Виды треугольников

Если у треугольника все три стороны имеют разную длину, то такой треугольник называется *разносторонним*.

Треугольник, у которого две стороны равны, называется *равнобедренным*. Его равные стороны называются *боковыми сторонами*, третья сторона — *основанием*, вершина, противолежащая основанию, — *вершиной равнобедренного треугольника* (рис. 104).

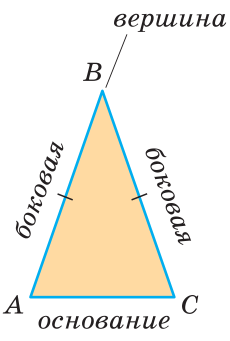


Рис. 104

Если у треугольника равны все три стороны, то он называется *равносторонним* (рис. 105, см. с. 54). Равносторонний треугольник является также и равнобедренным, где любую пару сторон можно принять за боковые стороны.

По величине углов треугольники делятся на *остроугольные* (у них все углы острые), *тупо-*

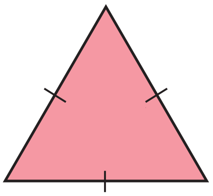



Рис. 105

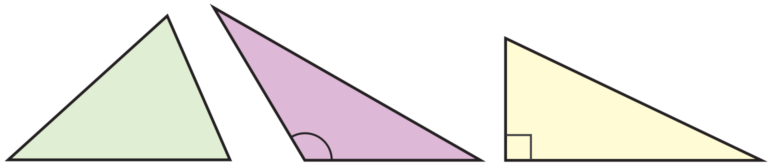



Рис. 106

*угольные* (есть тупой угол) и *прямоугольные* (есть прямой угол) (рис. 106).

А теперь выполните **Тест 3**.

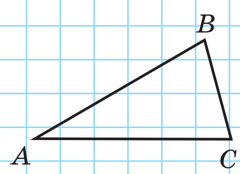
Подведем итоги.

***Треугольником*** *называется трехзвенная замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, которую она ограничивает.*

***Периметром*** *треугольника (многоугольника) называется сумма длин его сторон.*

### Тест 3

Является ли $\triangle ABC$ равнобедренным, если $P_{ABC} = 31$ см, $AB = 12$ см, $BC = 7$ см?




***Равными*** *треугольниками называются треугольники, которые можно совместить наложением.*

***Равнобедренным*** *треугольником называется треугольник, у которого две стороны равны.*

***Равносторонним*** *треугольником называется треугольник, у которого все стороны равны.*

Свойство равных треугольников. **В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов — равные стороны.**

*Замечание.* Называя или записывая равные треугольники, стараются соблюдать последовательность соответствующих вершин. Во многих случаях это удобно. Однако делать это необязательно. Обе записи: $\triangle ABC = \triangle KNM$ и $\triangle BAC = \triangle KNM$ — правильные. Иногда соответствующие вершины равных треугольников обозначают одними и теми же буквами, добавляя к буквам одного из треугольников индекс: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. При такой записи имеют в виду, что соответствующими являются вершины $A$ и $A_1$, $B$ и $B_1$, $C$ и $C_1$.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**51.** Треугольники $ABC$ и $MNK$ можно совместить наложением. При этом совпадут $\angle A$ и $\angle K$, $\angle B$ и $\angle M$. Если $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см, то чему равны длины сторон $MN$, $NK$ и $MK$ треугольника $MNK$?

**52.** Треугольники $ABC$ и $KED$ равны, причем $AB = ED$, $AC = KD$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$ см. Определите градусные меры углов $K$, $E$ и $D$ треугольника $KED$.

**53.** Из проволоки сделан равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 14 дм, и основанием, равным 8 дм. Проволоку разогнули и сделали из нее равносторонний треугольник. Найдите длины сторон этого треугольника.

**54.** На рисунке 107 четырехугольник $ABCD$ является объединением равнобедренного треугольника $ABD$ и равностороннего треугольника $BCD$. Внутри треугольников записаны их периметры. Найдите для каждого случая периметр четырехугольника $ABCD$.

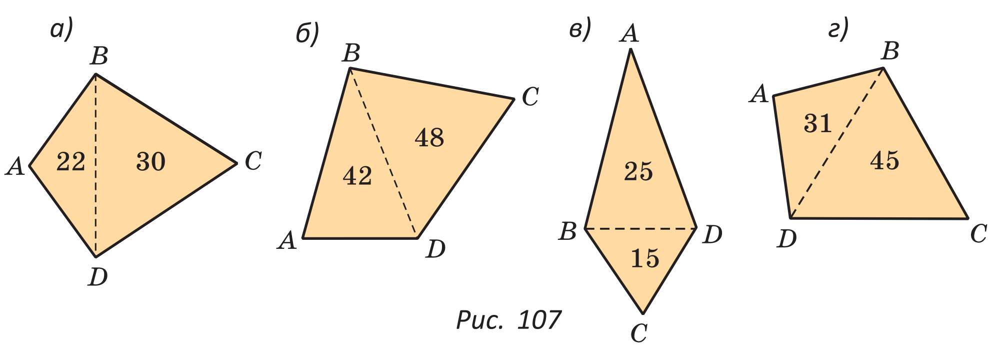


*Рис. 107*

**55.** Периметр равнобедренного треугольника равен 40 см, основание треугольника в 2 раза меньше боковой стороны. Найдите основание треугольника.

**56.** Боковая сторона равнобедренного треугольника на 4 см больше его основания. Периметр треугольника равен 56 см. Найдите боковую сторону треугольника.

**57.** Периметр треугольника равен 90 см. Одна из сторон треугольника на 2 см меньше другой стороны и в 2 раза меньше третьей. Найдите стороны треугольника.

**58.** На стороне $AD$ квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник $ADK$, где точка $K$ лежит внутри квадрата. Найдите отношение периметра квадрата к периметру многоугольника $ABCDK$.

**59.** Периметр треугольного участка равен 36 м. Стороны участка относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите длину каждой стороны участка.

**60.** Дан равносторонний треугольник $ABC$. На стороне $AB$ отмечена его середина $M$. На отрезке $MB$ отмечена его середина $K$. Найдите периметр треугольника $ABC$, если $MK = 12$ см.

**61.** В прямоугольной системе координат отмечены точки $A(-4; 4)$, $B(-4; 0)$, $C(3; 0)$, точка $O(0; 0)$ — начало координат. Классифицируйте треугольники $ABO$, $AOC$ и $ABC$ относительно сторон и относительно углов.

**62*.** Докажите, что если каждую сторону треугольника увеличить в 3 раза, то и его периметр увеличится также в 3 раза, а если увеличить в $k$ раз, то периметр увеличится в $k$ раз.

## § 9. Первый и второй признаки равенства треугольников

При выяснении равны ли треугольники нет необходимости устанавливать равенство всех их соответствующих элементов путем наложения или измерения. Следующие две теоремы гарантируют равенство треугольников при равенстве некоторых сторон и углов.

Теорема (первый признак равенства треугольников). **Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.**

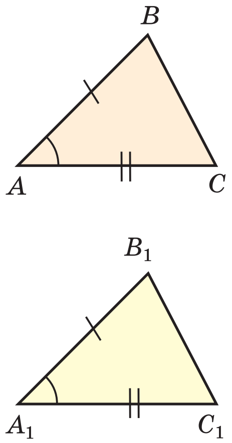


*Рис. 108*

Дано: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 108).
Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Доказательство. Наложим треугольник $ABC$ на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы совпали равные углы $A$ и $A_1$, луч $AB$ совпал с лучом $A_1B_1$, а луч $AC$ совпал с лучом $A_1C_1$. Так как отрезки $AB$ и $A_1B_1$ равны, то они совпадут при наложении, и вершина $B$ совпадет с вершиной $B_1$. Аналогично совпадут равные отрезки $AC$ и $A_1C_1$, вершина $C$ совпадет с вершиной $C_1$. Треугольники совпадут полностью, так как совпадут их вершины. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

*Говорят, что две стороны и угол между ними задают треугольник однозначно.*

Теорема (второй признак равенства треугольников). **Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.**

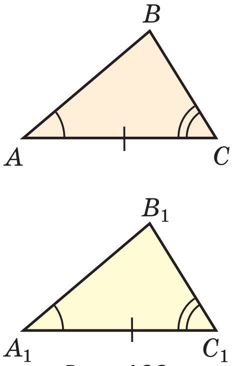


*Рис. 109*

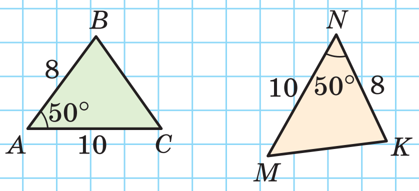
Дано: $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 109).
Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Доказательство. Наложим треугольник $ABC$ на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы совпали равные стороны $AC$ и $A_1C_1$, угол $A$ совпал с равным углом $A_1$, а угол $C$ — с равным углом $C_1$. Тогда луч $AB$ совпадет с лучом $A_1B_1$, луч $CB$ — с лучом $C_1B_1$, а вершина $B$ совпадет с вершиной $B_1$ (точка $B$ будет принадлежать и прямой $A_1B_1$, и прямой $C_1B_1$, и поэтому совпадет с точкой их пересечения $B_1$). Треугольники совпадут полностью, так как совпадут их вершины. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

*Говорят, что сторона и два прилежащих к ней угла задают треугольник однозначно.*

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

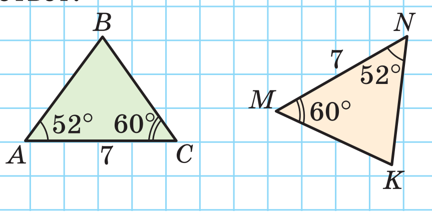
**Тест 1**

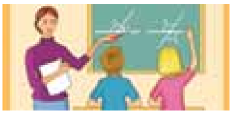
Какой угол треугольника $MNK$ равен углу $B$ треугольника $ABC$? Объясните ответ.




**Тест 2**

Какая сторона треугольника $MNK$ равна стороне $AB$ треугольника $ABC$? Объясните ответ.



## Задания к § 9

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

**ключевые задачи**

**Задача 1.** *Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в их серединах. Доказать, что расстояния между точками $A$ и $C$, $B$ и $D$ равны.*

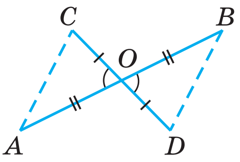
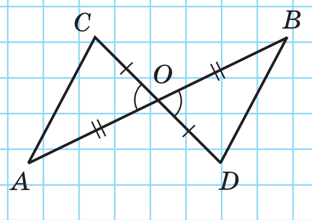


*Рис. 110*

Доказательство. Пусть $O$ — точка пересечения отрезков $AB$ и $CD$ (рис. 110). Рассмотрим $\triangle AOC$ и $\triangle BOD$. У них $AO = OB$, $CO = OD$ по условию, $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные. Треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, то есть по 1-му признаку равенства треугольников. Стороны $AC$ и $BD$ равны, так как в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны.

*Возможно краткое оформление решения задачи.*




Дано: $AO = OB$, $CO = OD$.

Доказать: $AC = BD$.

Доказательство.

1) $\triangle AOC$ и $\triangle BOD$:

$AO = OB$, $CO = OD$ по условию,

$\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные,

$\triangle AOC = \triangle BOD$ по 1-му признаку.

2) $AC = BD$. ⊠

**Задача 2.** *Дана простая замкнутая ломаная $ABCD$, у которой $AB = AD = 6$ см, $CD = 4$ см и луч $AC$ является биссектрисой угла $BAD$. Найти длину ломаной $ABCD$.*

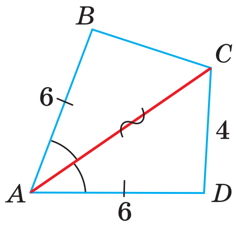



*Рис. 111*

Решение. У треугольников $ABC$ и $ADC$ сторона $AC$ — общая (рис. 111), $AB = AD$ по условию, $\angle BAC = \angle DAC$, так как $AC$ — биссектриса угла $BAD$. Эти треугольники равны по 1-му признаку равенства треугольников. Отсюда $BC = CD$ как соответствующие (соответственные) стороны в двух равных треугольниках. Длина ломаной $ABCD$:

$AB + BC + CD + AD = 6 + 4 + 4 + 6 = 20$ (см).

Ответ: 20 см.

**Задача 3.** *На сторонах угла $B$ отложены отрезки: $BA = BC$, $KA = MC$ (рис. 112). Доказать, что $\angle A = \angle C$.*

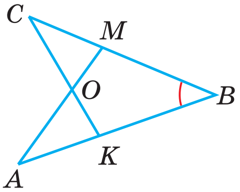



*Рис. 112*

Доказательство. Рассмотрим треугольники $ABM$ и $CBK$. У них $\angle B$ — общий, $AB = CB$ по условию, $MB = KB$, так как $MB = CB - CM$, $KB = AB - AK$ (если от равных отрезков отнять равные, получим равные отрезки). Треугольники $ABM$ и $CBK$ равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle C$ (в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы).

**Задача 4.** *На рисунке 113 $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle CAD = \angle BDA$. Доказать равенство треугольников $AOB$ и $DOC$.*

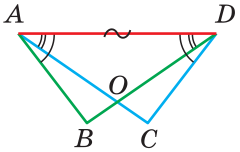



*Рис. 113*

Доказательство. Так как $\triangle ABD = \triangle DCA$ по 2-му признаку равенства треугольников (сторона $AD$ — общая, углы при стороне $AD$ соответственно равны по условию), то $AB = DC$, $\angle B = \angle C$. Так как $\angle BAO = \angle BAD - \angle CAD$, $\angle CDO = \angle CDA - \angle BDA$, то $\angle BAO = \angle CDO$ (если от равных углов отнять равные, получим равные углы). Тогда $\triangle AOB = \triangle DOC$ по 2-му признаку равенства треугольников.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**63.** Докажите, что: а) $\triangle AOC = \triangle DOB$; б) $\triangle ABM = \triangle CBM$; в) $\triangle ACB = \triangle ACD$; г) $\triangle ABC = \triangle ADC$ (рис. 114).

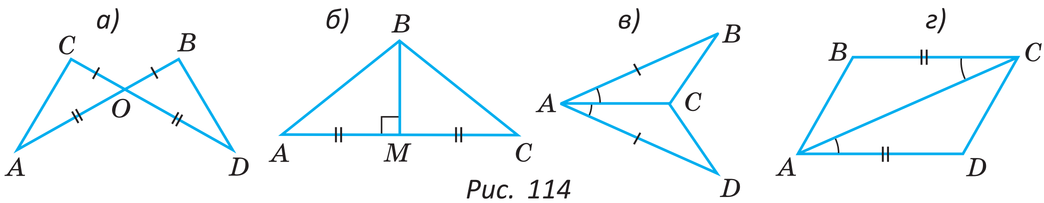



*Рис. 114*

**64.** На рисунке 115 $AC = DB$, $\angle CAD = \angle BDA$. Докажите, что:
а) $\angle B = \angle C$; б) $\angle BAC = \angle CDB$.

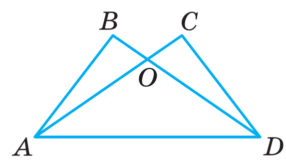



*Рис. 115*

**65.** Дана простая замкнутая ломаная $ABCD$, $BC = AD = 10$ дм, $\angle ACB = \angle CAD$, $AB = 8$ дм. Найдите длину ломаной $ABCD$.

**66.** Докажите, что: а) $\triangle ABC = \triangle ADC$; б) $\triangle AOB = \triangle COD$ (где $AO = CO$); в) $\triangle ABM = \triangle CBM$; г) $\triangle ABM = \triangle ACK$; $\triangle KBO = \triangle MCO$ (рис. 116).

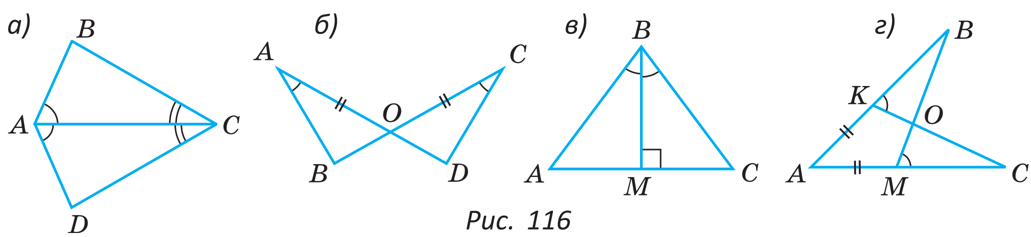



*Рис. 116*

**67.** Дан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = 9$ см, $AD = 12$ см, $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle ADB = \angle CBD$. Найдите периметр этого четырехугольника.

**68.** Дан отрезок $AD$. В одной полуплоскости относительно прямой $AD$ лежат точки $B$ и $C$ такие, что $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle BAC = \angle CDB$. Найдите длины отрезков $AC$ и $CD$, если $AB = 5$ см, $BD = 6$ см.

**69.** $AB$ и $CD$ — диаметры одной окружности с центром $O$. Докажите, что: а) хорда $AC$ равна хорде $BD$; б) $\triangle ADC = \triangle BCD$.

**70.** На рисунке 117 $\angle BAC = \angle NKM$, $\angle AMN = \angle KCB$, $AM = KC$. Докажите, что:
а) $\triangle ABC = \triangle KNM$; б) $AN = KB$.

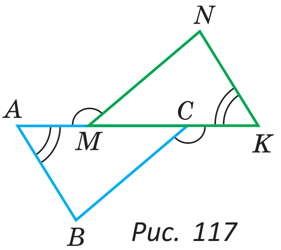


*Рис. 117*

**71*.** Равные отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$ так, что $OD = OB$. Докажите равенство треугольников $ABC$ и $CDA$.

**72*.** На сторонах угла $A$ отложены равные отрезки $AB$ и $AC$. На отрезке $AB$ взята точка $M$, на отрезке $AC$ — точка $K$ так, что $\angle ABK = \angle ACM$. Отрезки $BK$ и $CM$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что $\triangle MOB = \triangle KOC$.

**73*.** При помощи примера покажите, что если у $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то эти треугольники не обязательно равны.

**74*.** На координатной плоскости постройте $\triangle AOB$ и $\triangle A_1OB_1$, где $A(5;\ 1)$, $B(2;\ 6)$, $A_1(-5;\ -1)$, $B_1(-2;\ -6)$. Докажите, что $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$.

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Как найти периметр треугольника, многоугольника.
2. Какие треугольники называются равными.
3. Первый и второй признаки равенства треугольников.

**Умеем**

1. Доказывать первый и второй признаки равенства треугольников.
2. Строить чертеж треугольника по данным размерам его сторон и углов при помощи линейки и транспортира.

## § 10. Высота, медиана и биссектриса треугольника

У треугольника, помимо трех сторон, трех вершин и трех углов, имеются также и другие элементы — *высота*, *медиана* и *биссектриса*.

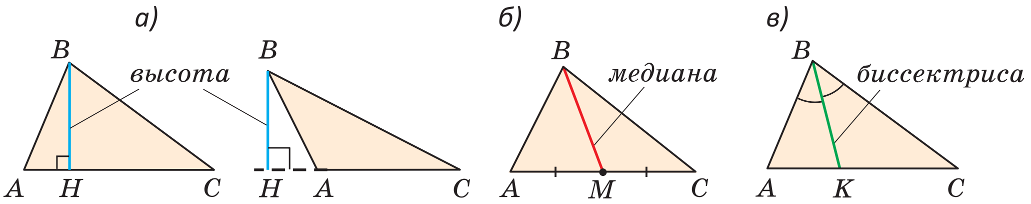


*Рис. 118*

Определение. **Высотой** треугольника (рис. 118, *а*) называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону или на ее продолжение (отрезок $BH$).

Определение. **Медианой** треугольника (рис. 118, *б*) называется отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны (отрезок $BM$).

Определение. **Биссектрисой** треугольника (рис. 118, *в*) называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой пересечения биссектрисы с противоположной стороной (отрезок $BK$).

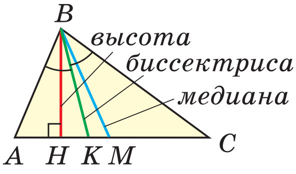


*Рис. 119*

В равных треугольниках равны соответствующие высоты, медианы и биссектрисы (докажите самостоятельно).

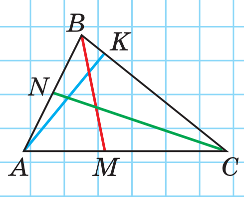
Если треугольник не равнобедренный, то высота, медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, не совпадают (рис. 119).

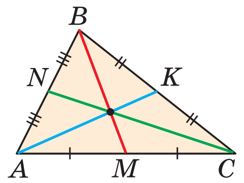
А теперь выполните **Тест 1** (см. с. 63).

Поскольку у треугольника три вершины, то у него и три высоты, три медианы, три биссектрисы. Позже мы докажем, что высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Это же касается медиан треугольника (рис. 120) и его биссектрис (рис. 121).

### Тест 1

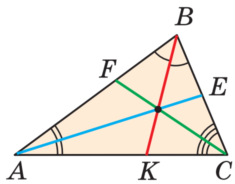
На рисунке изображены высота, медиана и биссектриса треугольника $ABC$. Найдите эти отрезки.




*медианы*

*Рис. 120*




*биссектрисы*

*Рис. 121*

Если треугольник остроугольный (рис. 122, *а*), то точка пересечения его высот находится внутри треугольника $ABC$. Если треугольник тупоугольный или прямоугольный (рис. 122, *б*, *в*), то продолжения высот пересекаются соответственно вне треугольника или в вершине прямого угла.

Точки пересечения высот, биссектрис и медиан называются *замечательными точками треугольника*.

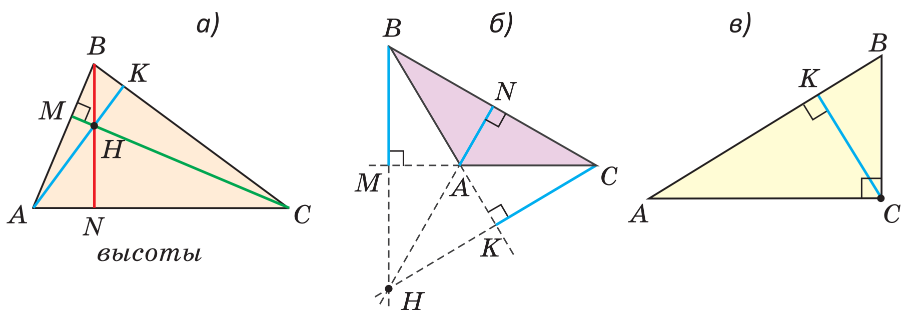
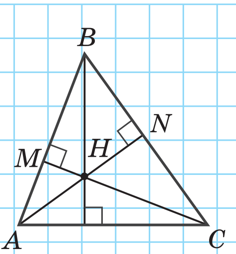



*Рис. 122*

А теперь выполните **Тест 2**.

### Тест 2

Сколько всего прямоугольных треугольников изображено на рисунке?




При помощи **Интернета** выясните, как называется точка пересечения: а) высот; б) медиан; в) биссектрис треугольника.

## Задачи к § 10

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**75.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с периметром 30 см к его основанию проведена медиана $BM$ длиной 6 см. Найдите периметр треугольника $ABM$.

**76.** В треугольнике $ABC$ проведены медианы $AM$ и $CK$, $AC = 12$ см, $AK = 4$ см, $CM = 5$ см. Найдите периметр треугольника $ABC$.

**77.** В треугольнике $ABC$ $AB = BC$. Докажите, что биссектриса $BK$ делит треугольник $ABC$ на два равных треугольника.

**78.** В треугольнике $ABC$ высота $AM$ делит сторону $BC$ пополам. Докажите, что отрезок $AM$ является биссектрисой треугольника $ABC$.

**79.** В треугольнике $ABC$ проведены медианы $AK$, $CM$ и $BN$. Найдите периметр треугольника $ABC$, если $AM + BK + CN = 28$ дм.

**80.** Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если у них: а) равны стороны $AB$ и $A_1B_1$, равны медианы $BM$ и $B_1M_1$ и $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$; б) равны стороны $AB$ и $A_1B_1$, равны биссектрисы $AK$ и $A_1K_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

**81*.** Дан треугольник $ABC$ с периметром 30 см, $AK$ — его медиана. Периметр треугольника $ABK$ равен 18 см, периметр треугольника $ACK$ — 24 см. Найдите длину медианы $AK$.

**82*.** Саша утверждает, что если треугольник $ABC$ разрезать по медиане $BM$ (рис. 123), то из полученных треугольников можно составить новый треугольник. Прав ли Саша? Если да, то изобразите на одном чертеже треугольник $ABC$ и новый составленный треугольник.

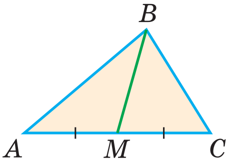


*Рис. 123*

## *Геометрия 3D*

*Тетраэдром* или *треугольной пирамидой* называется многогранник, у которого все четыре грани — треугольники. Любую его грань можно принять за основание, а противолежащую вершину — за вершину пирамиды. Если точка $S$ — вершина, а треугольник $ABC$ — основание пирамиды, то перпендикуляр $SH$ к плоскости $ABC$ является *высотой тетраэдра* (рис. 124).

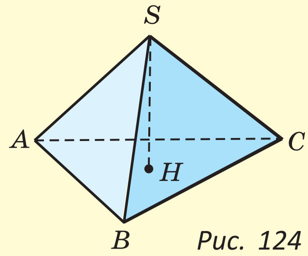


*Рис. 124*

**Задача.** *Имеется металлический прут длиной* 1 *м* 30 *см. Прут можно разрезать на части и скрепить их концами. Хватит ли прута, чтобы изготовить каркас тетраэдра, у которого все грани — равносторонние треугольники с периметром* 60 *см каждый?*

## *Моделирование*

Из листа бумаги вырежьте три остроугольных неравнобедренных треугольника. Используя только перегибание листа бумаги, найдите точку:

1) пересечения высот первого треугольника;
2) пересечения медиан второго треугольника;
3) пересечения биссектрис третьего треугольника.

Обоснуйте математически выполнение каждого задания.

## *Гимнастика ума*

В вершинах треугольника запишем по одному произвольному числу. Например, числа 12; 7 и 23 (рис. 125). Найдем суммы чисел, стоящих у концов каждой стороны. Запишем полученные суммы у середин этих сторон: $12 + 7 = 19$, $12 + 23 = 35$ и $23 + 7 = 30$.

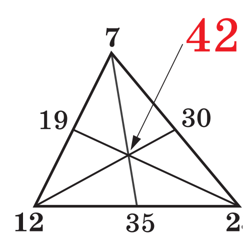


*Рис. 125*

Далее проведем медианы и найдем суммы чисел, записанных у концов каждой медианы. Получим $7 + 35 = 42$, $12 + 30 = 42$, $23 + 19 = 42$. То есть все три суммы у концов каждой из медиан одинаковы и равны 42!

Нарисуйте в тетради треугольник и запишите в его вершинах три свои числа. Проделайте описанные выше операции и найдите суммы чисел у концов каждой медианы. Если вы все делали правильно, то получите три одинаковые суммы. Как вы это объясните?

## § 11. Равнобедренный треугольник

Определение. Треугольник называется **равнобедренным**, если у него две стороны равны.

Равные стороны называются **боковыми** сторонами, третья сторона — **основанием**, вершина, противолежащая основанию, — **вершиной** равнобедренного треугольника.

Рассмотрим некоторые свойства равнобедренного треугольника и один из его признаков.

Теорема (о свойстве углов при основании).
**В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.**

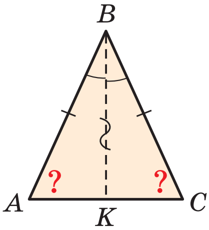


*Рис. 126*

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$ (рис. 126).
Доказать: $\angle A = \angle C$.
Доказательство. Проведем биссектрису $BK$ треугольника $ABC$. Треугольники $ABK$ и $CBK$ равны по двум сторонам и углу между ними: сторона $BK$ — общая, $AB = BC$ по условию, углы $ABK$ и $CBK$ равны по определению биссектрисы. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle A = \angle C$.

Теорема доказана.

Теорема (о свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника).
**В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является его медианой и высотой.**

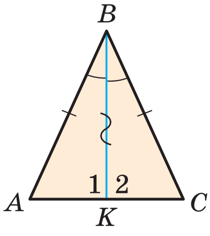


*Рис. 127*

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $BK$ — биссектриса (рис. 127).
Доказать: $BK$ — медиана и высота.
Доказательство. Треугольники $ABK$ и $CBK$ равны по двум сторонам и углу между ними (см. предыдущую теорему). Из равенства треугольников следует, что $AK = KC$ и $\angle 1 = \angle 2$. Так как углы 1 и 2 смежные, то их сумма равна $180°$,

поэтому $\angle 1 = \angle 2 = 90°$. Следовательно, $BK$ — медиана и высота. Теорема доказана.

*Замечание.* Поскольку из вершины треугольника можно провести только одну биссектрису, одну высоту и одну медиану, то теорему можно сформулировать так: «*Биссектриса, высота и медиана равнобедренного треугольника, проведенные из вершины к основанию, совпадают*». То есть если по условию задачи дана высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, то согласно данной теореме она является биссектрисой и медианой. Аналогично, если дана медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, то она является высотой и биссектрисой.

Теорема (признак равнобедренного треугольника). **Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.**

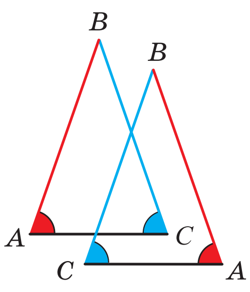
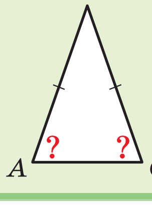



*Рис. 128*

Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = \angle C$.
Доказать: $AB = BC$.
Доказательство. Мысленно перевернем треугольник $ABC$ обратной стороной (рис. 128) и наложим перевернутый треугольник на треугольник $ABC$ так, чтобы их стороны $AC$ совпали, угол $C$ совпал с углом $A$, угол $A$ совпал с углом $C$. Тогда перевернутый треугольник совместится с данным, и сторона $BC$ совместится со стороной $AB$. Следовательно, $AB = BC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный. Теорема доказана.

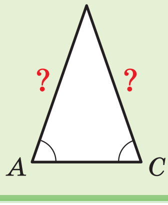
Доказанный признак равнобедренного треугольника является теоремой, обратной теореме о свойстве углов при основании равнобедренного треугольника (рис. 129).

Теорема. **Если треугольник равнобедренный, то углы при его основании равны.**




Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$.
Доказать: $\angle A = \angle C$.

Обратная теорема. **Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.**




Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = \angle C$.
Доказать: $AB = BC$.

*Рис. 129*

Напомним, что любая теорема состоит из условия — того, что дано, и заключения — того, что нужно доказать. У теоремы, обратной данной, условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной.

## Задания к § 11

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *Доказать, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны между собой.*

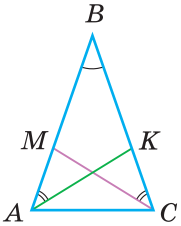


*Рис. 130*

Доказательство. Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$, $AK$ и $CM$ — биссектрисы (рис. 130). Нужно доказать, что $AK = CM$. Рассмотрим $\triangle AKB$ и $\triangle CMB$. У них $\angle B$ — общий, $AB = BC$ по условию, $\angle BAK = \angle BCM$ как половины равных углов $A$ и $C$ при основании равнобедренного треугольника. Тогда $\triangle AKB = \triangle CMB$ по 2-му признаку равенства треугольников, откуда $AK = CM$. Что и требовалось доказать.

*Замечание.* Вторым способом доказательства будет рассмотрение $\triangle AKC$ и $\triangle CMA$ и доказательство их равенства.

**Задача 2.** *Доказать, что перпендикуляр, проведенный из центра окружности к хорде, делит эту хорду пополам.*

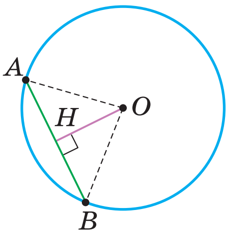


*Рис. 131*

Доказательство. Пусть $O$ — центр окружности, $AB$ — хорда, $OH$ — перпендикуляр к хорде $AB$ (рис. 131). Отрезки $OA$ и $OB$ равны как радиусы. Поэтому треугольник $AOB$ — равнобедренный, а $OH$ — его высота, проведенная к основанию. Мы знаем, что высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является и медианой. А медиана делит сторону треугольника пополам, то есть $AH = HB$. Что и требовалось доказать.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**83.** Найдите отрезок или угол, обозначенные знаком вопроса (рис. 132). Объясните свой ответ.

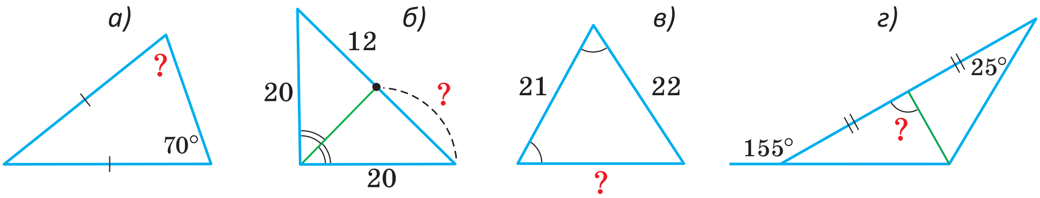



*Рис. 132*

**84.** Дан треугольник $ABC$, у которого $\angle A = \angle B$, $AB + BC =$ $= 12$ см, $AC + BC = 16$ см. Найдите периметр $\triangle ABC$.

**85.** В треугольнике $ABC$ $AC = AB = 12$ м, $P_{ABC} = 32$ м, $AK$ — высота треугольника. Найдите отрезок $CK$.

**86.** Треугольник $ABC$ — равносторонний, $CK$ — его биссектриса, $AK = 7{,}5$ см. Найдите периметр $\triangle ABC$.

**87.** На рисунке 133 треугольник $ABC$ — равнобедренный, где $AB = BC$. Докажите, что треугольник $KBM$ также равнобедренный, если: а) $AK = CM$; б) $AM = CK$; в) $\angle ABK = \angle CBM$.

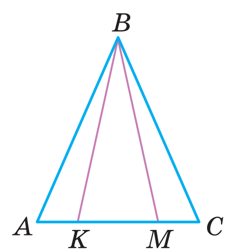



*Рис. 133*

**88.** Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

**89.** Докажите свойство углов равностороннего треугольника: «В равностороннем треугольнике все углы равны между собой». Сформулируйте утверждение, обратное данному (признак равностороннего треугольника). Докажите его.

**90.** Основание равнобедренного треугольника относится к его боковой стороне как $2 : 3$. Периметр треугольника равен 72 см. Найдите основание треугольника.

**91.** В равнобедренном треугольнике $MNK$ ($KM = KN$) проведена биссектриса $KE$, равная 24 см. Периметр треугольника $KEN$ равен 56 см. Найдите периметр треугольника $MNK$.

**92.** Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны между собой.

**93.** Треугольник $ABC$ — равнобедренный, $AB = BC$. На луче $AC$ за точку $C$ отложен отрезок $CM$, на луче $CA$ за точку $A$ отложен отрезок $AK$ такой, что $AK = CM$. Докажите, что треугольник $MBK$ — равнобедренный.

**94.** Докажите, что диаметр окружности, проходящий через середину хорды (не являющейся диаметром), перпендикулярен этой хорде.

**95*.** В треугольнике $MNK$ проведена биссектриса $ME$. Известно, что $\angle MKN + \angle NME = \angle MNK + \angle KME$, $KE = 4$ см, $MN = 9$ см. Найдите периметр треугольника $MNK$.

**96*.** Треугольник $ABC$ — равносторонний (рис. 134, *а*, *б*). Докажите, что треугольник $MNK$ — равносторонний, если: а) $MB = 2AM$, $NC = 2BN$, $AK = 2KC$; б) $AM = AB$, $CN = AC$, $BK = BC$.

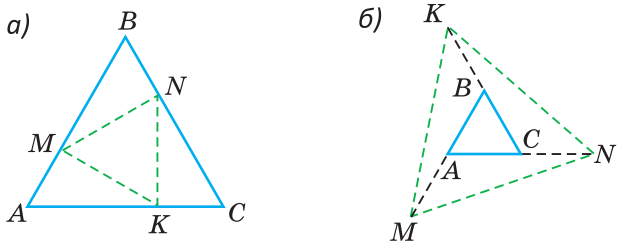



*Рис. 134*

**97*.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AK$ и $CM$ к боковым сторонам. Биссектрисы пересекаются в точке $O$. Докажите, что $\triangle AOM = \triangle COK$.

**98*.** Один пролет моста представляет собой объединение семи равных равнобедренных треугольников, сваренных из металлических балок (рис. 135). Периметр одного такого треугольника равен 11 м. На весь пролет пошло 59 м металлических балок. Определите длину

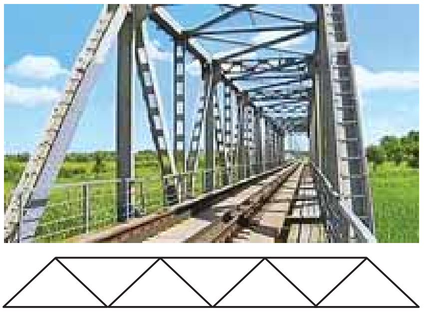


*Рис. 135*

основания одного равнобедренного треугольника и длину (по низу) всего пролета.

**99*.** Дан четырехугольник $ABCD$. Отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $O$. Периметры треугольников $ABC$ и $BAD$ равны, периметры треугольников $CDB$ и $DCA$ равны. Докажите, что треугольник $AOB$ — равнобедренный.

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Определение высоты, медианы и биссектрисы треугольника.
2. Определение равнобедренного треугольника, названия его сторон и углов.
3. Свойство углов равнобедренного треугольника.
4. Свойство биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию.
5. Признак равнобедренного треугольника, связанный с углами.

**Умеем**

1. Доказывать теорему о свойстве углов равнобедренного треугольника.
2. Доказывать теорему о свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника.

3*. Доказывать признак равнобедренного треугольника, связанный с углами.

## § 12. Признаки равнобедренного треугольника

Вы уже знаете один признак равнобедренного треугольника: «Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный». Докажем еще три признака равнобедренного треугольника, связанных с его высотой, медианой и биссектрисой.

Теорема. **Если в треугольнике высота является медианой, то треугольник равнобедренный.**

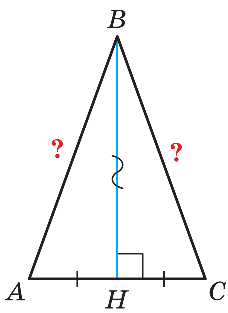


*Рис. 136*

Дано: $BH$ — высота и медиана $\triangle ABC$ (рис. 136).
Доказать: $AB = BC$.
Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABH$ и $\triangle CBH$. У них сторона $BH$ — общая, $\angle AHB = \angle CHB = 90°$ (так как $BH$ — высота), $AH = CH$ (так как $BH$ — медиана). Треугольники $ABH$ и $CBH$ равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон $AB$ и $BC$. Теорема доказана.

Теорема. **Если в треугольнике высота является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.**

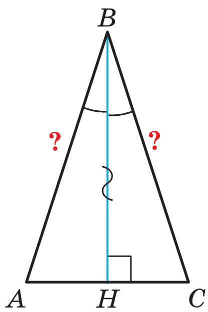


*Рис. 137*

Дано: $BH$ — высота и биссектриса $\triangle ABC$.
Доказать: $AB = BC$ (рис. 137).
Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABH$ и $\triangle CBH$. У них сторона $BH$ — общая, $\angle AHB = \angle CHB = 90°$ (так как $BH$ — высота), $\angle ABH = \angle CBH$ (так как $BH$ — биссектриса). Треугольники $ABH$ и $CBH$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон $AB$ и $BC$. Теорема доказана.

Теорема. **Если в треугольнике медиана является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.**

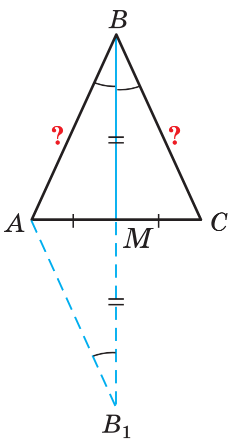
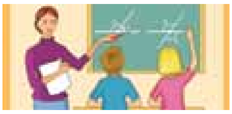


*Рис. 138*

Дано: $BM$ — медиана и биссектриса $\triangle ABC$.
Доказать: $AB = BC$ (рис. 138).
Доказательство. Продлим медиану $BM$ на ее длину за точку $M$. Получим $MB_1 = BM$. Треугольники $AMB_1$ и $CMB$ равны по двум сторонам и углу между ними ($MB_1 = BM$ по построению; $AM = MC$, так как $BM$ — медиана; $\angle AMB_1 = \angle CMB$ как вертикальные). Из равен-

ства этих треугольников следует, что $AB_1 = BC$ и $\angle AB_1M = \angle CBM$. Но $\angle CBM = \angle ABM$, так как $BM$ — биссектриса по условию. Тогда $\angle AB_1B = \angle ABB_1$ и $\triangle ABB_1$ — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Следовательно, $AB = AB_1$. А так как $AB_1 = BC$, то $AB = BC$. Теорема доказана.

*Замечание.* Прием продления (продолжения) медианы часто используется при решении геометрических задач.



## Задания к § 12

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *В треугольнике $ABC$ с периметром 54 см медиана $AK$ перпендикулярна стороне $BC$, а высота $BM$ составляет равные углы со сторонами $BA$ и $BC$. Найти стороны треугольника $ABC$.*

Решение. Так как медиана $AK$ является и высотой, то $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием $BC$ и $AB = AC$. Так как высота $BM$ является и биссектрисой, то $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием $AC$ и $AB = BC$. Тогда $\triangle ABC$ — равносторонний, $AB = BC = AC = \frac{54}{3} = 18$ (см).

Ответ: 18 см.

**Задача 2.** *Биссектриса $AK$ треугольника $ABC$ делит сторону $BC$ пополам. Периметр треугольника $ABC$ равен 36 см, периметр треугольника $AKC$ равен 30 см. Найти длину биссектрисы $AK$.*

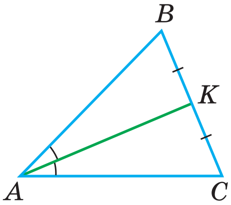


*Рис. 139*

Решение. Из условия следует, что биссектриса $AK$ является и медианой $\triangle ABC$ (рис. 139). Тогда $\triangle ABC$ — равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника и $AB = AC$. Так как $BK = CK$, то сумма отрезков $AC$ и $CK$ равна полупериметру $\triangle ABC$, то есть 18 см. По условию периметр $\triangle AKC$ равен 30 см, поэтому $AK = 30 - 18 = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**100.** Найдите сторону или угол, обозначенные знаком вопроса (рис. 140). Объясните свой ответ.

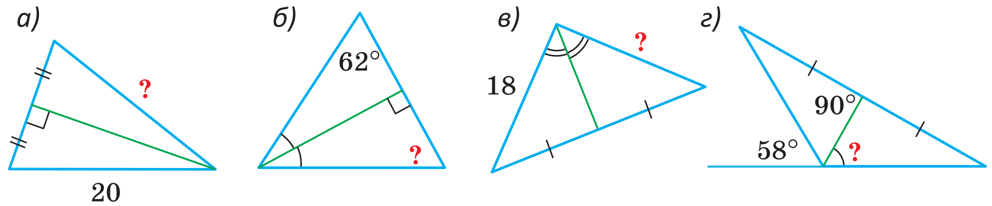



*Рис. 140*

**101.** В треугольнике $ABC$ высота $BK$ делит сторону $AC$ пополам, биссектриса $AM$ перпендикулярна стороне $BC$. Найдите периметр треугольника $ABC$, если $BM = 2{,}4$ см.

**102.** Перпендикулярные отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$ так, что $CO = OD$, $AC = 12$ см, $BD = 9$ см. Найдите периметр четырехугольника $ACBD$.

**103.** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $AM$ (рис. 141). На стороне $AC$ взята точка $K$. Прямые $BK$ и $AM$ перпендикулярны, и прямая $BK$ делит медиану $AM$ пополам. Докажите, что $BC = 2AB$.

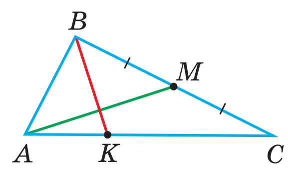



*Рис. 141*

**104.** В треугольнике $ABC$ биссектриса $AK$ перпендикулярна медиане $BM$. Найдите периметр треугольника $ABC$, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см.

**105.** Докажите, что прямая, пересекающая биссектрису угла и перпендикулярная этой биссектрисе, отсекает на сторонах угла равные отрезки.

**106*.** В треугольнике $ABC$ с периметром 24 см проведена медиана $CK$, равная 8 см, $\angle KCB = \angle KCA$. Найдите периметр треугольника $KAC$.

**107*.** Биссектриса $CK$ треугольника $ABC$ проходит через середину медианы $BM$. Периметр треугольника $ABC$ равен 36 см, $AM = 8$ см. Найдите длину стороны $AB$.

## Геометрия 3D

*У правильной треугольной пирамиды* $DABC$ в основании лежит равносторонний треугольник $ABC$, а боковые грани $ADB$, $ADC$, $BDC$ — равные равнобедренные треугольники с общей вершиной $D$ (рис. 142).

*У правильной четырехугольной пирамиды* в основании лежит квадрат $MNKE$, а боковые грани $MPE$, $MPN$, $NPK$, $EPK$ — равные равнобедренные треугольники с общей вершиной $P$ (рис. 143).

**Задача.** *Имеется кусок проволоки длиной 2 м 30 см. Хватит ли его, чтобы изготовить каркас: а) правильной треугольной пирамиды с ребром основания 30 см и боковым ребром 40 см; б) четырехугольной пирамиды, у которой все ребра равны по 30 см?*

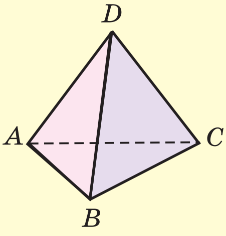


*Рис. 142*

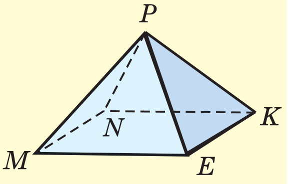


*Рис. 143*

# § 13. Третий признак равенства треугольников

Вам уже известны два признака равенства треугольников. Рассмотрим еще один.

Теорема (третий признак равенства треугольников). **Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.**

Дано: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 144).
Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

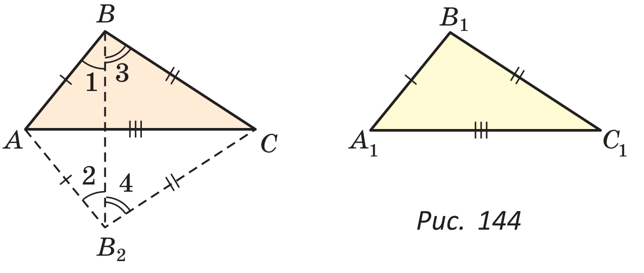


*Рис. 144*

Доказательство. Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику $ABC$ так, чтобы у них совместились равные стороны $A_1C_1$ и $AC$, а вершины $B_1$ и $B$ оказались в разных полуплоскостях относительно прямой $AC$. Треугольник $A_1B_1C_1$ займет положение треугольника $AB_2C$. Проведем отрезок $BB_2$. Так как $AB_2 = AB$ и $B_2C = BC$, то треугольники $ABB_2$ и $CBB_2$ — равнобедренные. Откуда $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (как углы при основании равнобедренного треугольника). Тогда $\angle ABC = \angle AB_2C$, и треугольники $ABC$ и $AB_2C$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

*Замечание.* Чтобы отрезок $BB_2$ проходил внутри треугольника $ABC$, следует прикладывать треугольники большей стороной.

Говорят, что три стороны задают треугольник однозначно.

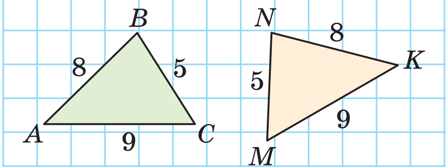
Итак, теперь вы знаете три признака равенства треугольников. Можно сформулировать и другие признаки равенства треугольников, в которых неизбежно будет присутствовать соответственное равенство каких-то трех элементов двух треугольников. Однако не любые три элемента задают треугольник. Так, например, если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники не обязательно равны. То же касается треугольников, у которых соответственно равны две стороны и угол, противолежащий одной из этих сторон.

На рисунке 145, *а, б* вы видите пары таких неравных треугольников.

А теперь выполните **Тест**.

**Тест**

Какой угол $\triangle MNK$ равен углу $C$ $\triangle ABC$? Объясните ответ.



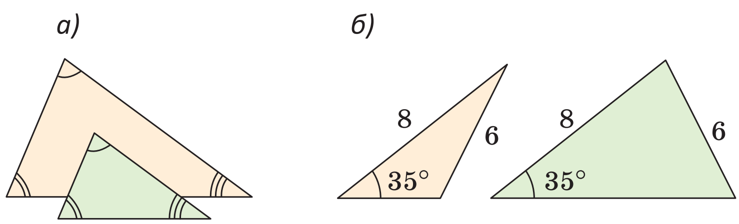
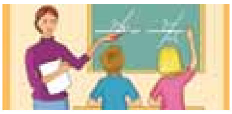




*Рис. 145*



# Задания к § 13

## РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *У простой замкнутой ломаной $ABCD$ $AB = AD$, $BC = DC$. Доказать, что $\angle B = \angle D$ и луч $AC$ — биссектриса угла $BAD$.*

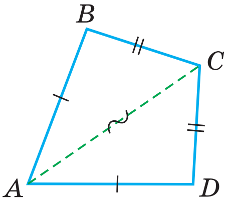



*Рис. 146*

Доказательство. Проведем отрезок $AC$ (рис. 146). Треугольники $ABC$ и $ADC$ равны по 3-му признаку равенства треугольников ($AB = AD$ и $BC = DC$ по условию, сторона $AC$ — общая). Поэтому $\angle B = \angle D$ и $\angle BAC = \angle DAC$ как соответствующие в двух равных треугольниках и луч $AC$ — биссектриса угла $BAD$.

**Задача 2.** *Доказать равенство треугольников по двум сторонам и медиане между ними.*

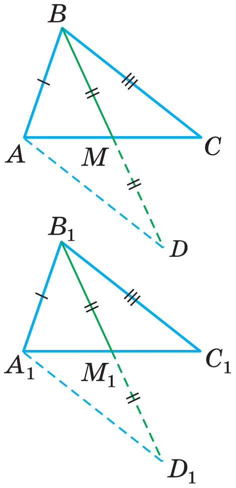



*Рис. 147*

Доказательство. Пусть $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $BM = B_1M_1$, где $BM$ и $B_1M_1$ — медианы (рис. 147). Нужно доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Продлим в каждом треугольнике данную медиану на ее длину так, что $MD = BM$, $M_1D_1 = B_1M_1$. Так как $\triangle AMD = \triangle CMB$ по 1-му признаку равенства треугольников ($AM = MC$, $\angle AMD = \angle CMB$ как вертикальные, $BM = MD$ по построению), то $AD = BC$. Аналогично $\triangle A_1M_1D_1 = \triangle C_1M_1B_1$, откуда $A_1D_1 = B_1C_1$. По условию $BC = B_1C_1$, следовательно, $AD = A_1D_1$ и $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ по трем сторонам. Тогда $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$ и $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по 1-му признаку равенства треугольников. Отсюда $AM = A_1M_1$, $AC = A_1C_1$ (так как $BM$ и $B_1M_1$ — медианы) и $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

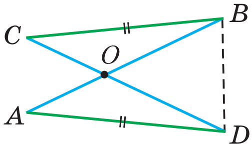



*Рис. 148*

**Задача 3.** *Два равных отрезка $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$ и $AD = BC$. Доказать, что $BO = DO$.*

Доказательство. Соединим точки $B$ и $D$ отрезком (рис. 148). Треугольники $ABD$ и $CDB$

равны по трем сторонам (сторона $BD$ — общая, $AB = CD$ и $AD = CB$ по условию). Из равенства треугольников следует, что $\angle ABD = \angle CDB$. Тогда $\triangle BOD$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), откуда $BO = DO$.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**108.** Докажите равенство треугольников (рис. 149).

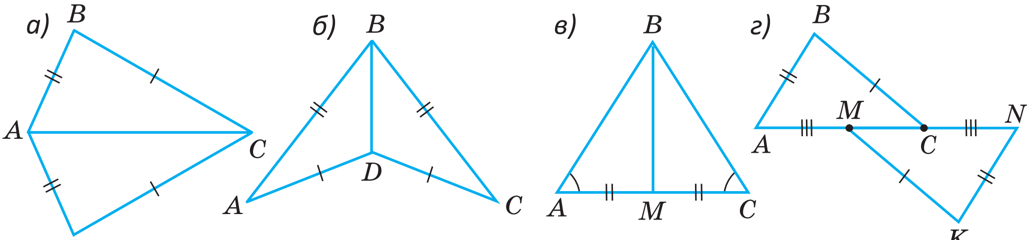



*Рис. 149*

**109.** Дан отрезок $AB$. По одну сторону от прямой $AB$ взяты точки $M$ и $K$ такие, что $AM = BK$, $AK = BM$. Докажите равенство треугольников $AMB$ и $BKA$.

**110.** Докажите, что если в окружности с центром $O$ провести две равные хорды $MK$ и $NE$, то углы $MOK$ и $NOE$ будут равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

**111.** У четырехугольника $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle BAD + \angle BCD = 168°$. Найдите $\angle BCD$.

**112.** На рисунке 150 $BK = BM$, $KE = ME$. Докажите, что $AB = BC$.

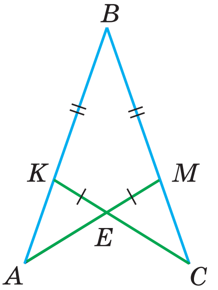



*Рис. 150*

**113.** Дана окружность с центром в точке $O$, $AB$ и $BC$ — две равные хорды окружности. Точки $E$ и $F$ — середины данных хорд, $OE = 6$ дм, $EF = 5$ дм. Найдите периметр $\triangle EOF$.

**114.** Докажите, что если у треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и медиана $AM$ равна медиане $A_1M_1$, то такие треугольники равны между собой.

**115.** Треугольники $ABC$ и $ABC_1$ — равнобедренные с общим основанием $AB$, где точки $C$ и $C_1$ лежат по разные стороны от прямой $AB$ и $AC \neq AC_1$. Докажите, что $CC_1 \perp AB$.

**116*.** Бумажный квадрат $ABCD$ сложили по диагонали $AC$. Объясните, почему при этом совпадут вершины $B$ и $D$.

**117*.** Треугольники $AOC$ и $DOB$ равны, и $AO \neq OB$ (рис. 151). Точка $M$ — середина отрезка $BC$. Докажите, что треугольник $AMD$ — равнобедренный.

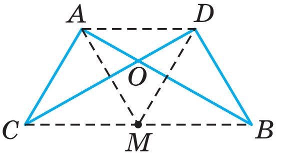


Рис. 151

**118*.** Обязательно ли равны два четырехугольника, если стороны одного соответственно равны сторонам другого? Сформулируйте какой-нибудь признак равенства четырехугольников.

## § 14. Серединный перпендикуляр к отрезку

Определение. **Серединным перпендикуляром** к отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

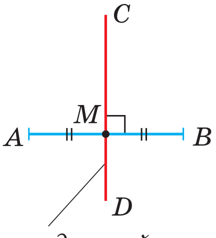


Рис. 152

Прямая $CD$ — серединный перпендикуляр к отрезку $AB$, то есть $CD \perp AB$ и $AM = MB$ (рис. 152).

Теорема (о серединном перпендикуляре).
**Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.**

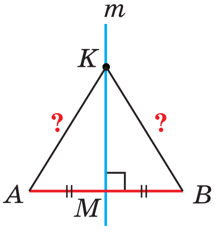


Рис. 153

В данной теореме два утверждения: прямое и ему обратное. Докажем каждое из этих утверждений отдельно.

1) Дано: $m$ — серединный перпендикуляр к отрезку $AB$, $K \in m$ (рис. 153).
Доказать: $KA = KB$.

Доказательство. По определению серединного перпендикуляра $KM \perp AB$, $AM = MB$. Тогда в треугольнике $AKB$ высота $KM$ является медианой. По признаку равнобедренного треугольника $\triangle AKB$ — равнобедренный, поэтому $KA = KB$.

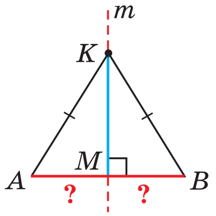


*Рис. 154*

2) Дано: $KA = KB$ (рис. 154).

Доказать: $K \in m$, где $m$ — серединный перпендикуляр к отрезку $AB$.

Доказательство. Проведем в равнобедренном $\triangle AKB$ высоту $KM$, которая по свойству равнобедренного треугольника будет и медианой. Получим $KM \perp AB$, $AM = MB$. Прямая $m$, проходящая через высоту $KM$, — серединный перпендикуляр к отрезку $AB$.

Теорема доказана.

*Геометрическим местом точек* плоскости (или пространства) называется множество всех точек плоскости (или пространства), обладающих общим свойством.

Из доказанной теоремы следует, что серединный перпендикуляр к отрезку — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка.

## Задания к § 14

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *В четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$, $AD = DC$* (рис. 155). *Доказать, что $AC \perp BD$.*

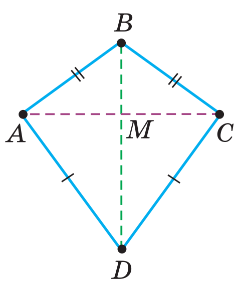


*Рис. 155*

Доказательство. *1-й способ.* Из равенства треугольников $ABD$ и $CBD$ по трем сторонам следует, что $\angle ABD = \angle CBD$. В равнобедренном треугольнике $ABC$ биссектриса $BM$ является и высотой. Поэтому $AC \perp BD$.

*2-й способ.* Точки $B$ и $D$ равноудалены от концов отрезка $AC$, поэтому они лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $AC$. Так как через две точки проходит единственная прямая, то $BD$ — серединный перпендикуляр к отрезку $AC$. Отсюда $AC \perp BD$ и $AM = MC$.

**Задача 2.** (1-я замечательная точка треугольника). *Доказать, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.*

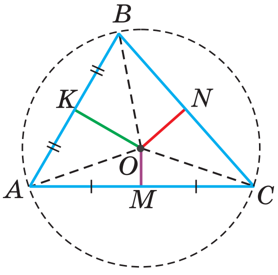



Рис. 156

Доказательство. Пусть два серединных перпендикуляра к сторонам $AC$ и $AB$ пересекаются в точке $O$ (рис. 156). Точка $O$ лежит на серединном перпендикуляре $OM$, поэтому $OA = OC$. Точка $O$ лежит на серединном перпендикуляре $OK$, поэтому $OA = OB$. Отсюда $OB = OC$. Поскольку точка $O$ равноудалена от концов отрезка $BC$, то она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $BC$. Таким образом, третий серединный перпендикуляр пройдет через точку $O$, и все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекутся в одной точке.

*Замечания.* 1. Если ножку циркуля поставить в точку $O$ и построить окружность радиусом $OA$, то она пройдет через все вершины треугольника в силу того, что $OA = OB = OC$. Такая окружность называется *описанной около треугольника*. В данной задаче мы доказали, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

2. Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника — это еще одна замечательная точка треугольника помимо уже известных вам точек пересечения биссектрис, медиан, высот.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**119.** Точка $M$ лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$, $AM + MB = 15$ м. Найдите длину отрезка $MA$.

**120.** Прямая $a$ перпендикулярна отрезку $AB$ и проходит через его середину $K$. Точка $M$ принадлежит прямой $a$, $\angle AMB = 84°$. Найдите $\angle BMK$.

**121.** Серединный перпендикуляр к стороне $AC$ треугольника $ABC$ пересекает сторону $BC$ в точке $K$. Найдите периметр треугольника $ABK$, если $AB = 5$ см, $BC = 7$ см.

**122.** Точки $M$ и $K$ лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$ по разные стороны от прямой $AB$, $MA = 16$ см, $KB = 12$ см. Найдите периметр четырехугольника $AMBK$.

**123.** Докажите, что серединный перпендикуляр к хорде окружности проходит через центр окружности.

**124.** Серединные перпендикуляры $KL$ и $MN$ к боковым сторонам $BC$ и $AB$ равнобедренного треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$ (рис. 157). Докажите, что: а) $MN = KL$; б) $MO = KO$.

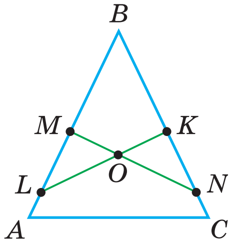



*Рис. 157*

**125.** Две окружности разного радиуса с центрами в точках $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Докажите, что линия центров $O_1O_2$ перпендикулярна общей хорде $AB$ этих окружностей.

**126*.** Найдите геометрическое место вершин равнобедренных треугольников с данным основанием.

**127*.** По одну сторону от прямой $a$ расположены точки $A$ и $B$. На прямой $a$ найдите точку $M$ такую, чтобы расстояния от точки $M$ до точек $A$ и $B$ были равны.

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Признаки равнобедренного треугольника.
2. Теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.
3. Замечательные точки треугольника.

### Умеем

1. Доказывать теорему «Если в треугольнике высота является медианой, то треугольник равнобедренный».
2. Доказывать теорему «Если в треугольнике высота является биссектрисой, то треугольник равнобедренный».
3*. Доказывать теорему «Если в треугольнике медиана является биссектрисой, то треугольник равнобедренный».
4*. Доказывать теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

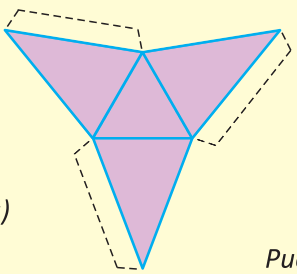
## *Геометрия 3D*

Из плотной бумаги сделайте развертку:

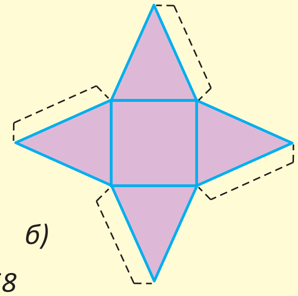
а) треугольной пирамиды, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной 10 см, а все боковые грани — равнобедренные треугольники с боковой стороной, равной 13 см (рис. 158, *а*);

б) четырехугольной пирамиды, в основании которой квадрат со стороной 12 см, а все боковые грани — равнобедренные треугольники с боковой стороной, равной 9 см (рис. 158, *б*).

Склейте пирамиды по данным разверткам, соединив вместе вершины равнобедренных треугольников.



*а)*



*б)*

*Рис. 158*

## *Моделирование*

Маша обучается в строительном колледже. На практических занятиях ей поручили просверлить отверстие в центре металлического круга. Чтобы найти центр круга, девушка начертила хорду, затем при помощи рулетки отметила ее середину и, используя угольник, построила перпендикуляр к этой хорде с основанием в середине хорды (рис. 159). Помогите девушке продолжить действия и найти центр круга.

Составьте математическую модель задания, которая объясняет действия Маши и доказывает правильность выбранного алгоритма.

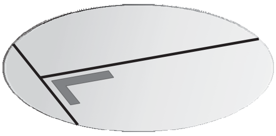


*Рис. 159*

## ЗАПОМИНАЕМ

**1.** Три признака равенства треугольников:
   1) По двум сторонам и углу между ними.
   2) По стороне и двум прилежащим к ней углам.
   3) По трем сторонам.

**2.** Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

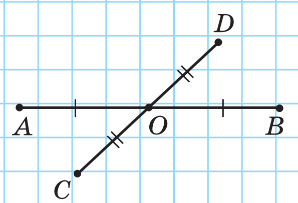
**3.** Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины к основанию, является его высотой и медианой.

**4.** Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный (признак равнобедренного треугольника).
**5.** Если высота треугольника является его медианой или биссектрисой, или медиана является его биссектрисой, то треугольник равнобедренный (признаки равнобедренного треугольника).
**6.** Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.
**7.** Все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (1-я замечательная точка треугольника).

## Проверяем себя

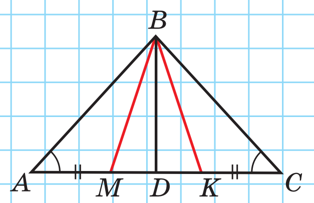
### Тест 1

По рисунку докажите, что:
а) $AC = BD$, $AD = BC$,
б) $\angle CAD = \angle DBC$.



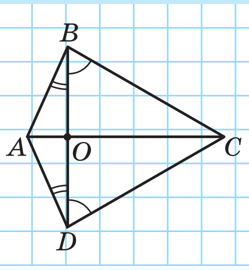

### Тест 2

Известно, что $\angle A = \angle C$, $AM = CK$, $BD \perp AC$.
Докажите, что:
а) $\triangle ABM = \triangle CBK$;
б) $\triangle MBD = \triangle KBD$.




### Тест 3

По рисунку докажите, что:
а) $AC \perp BD$;
б) $BO = OD$.



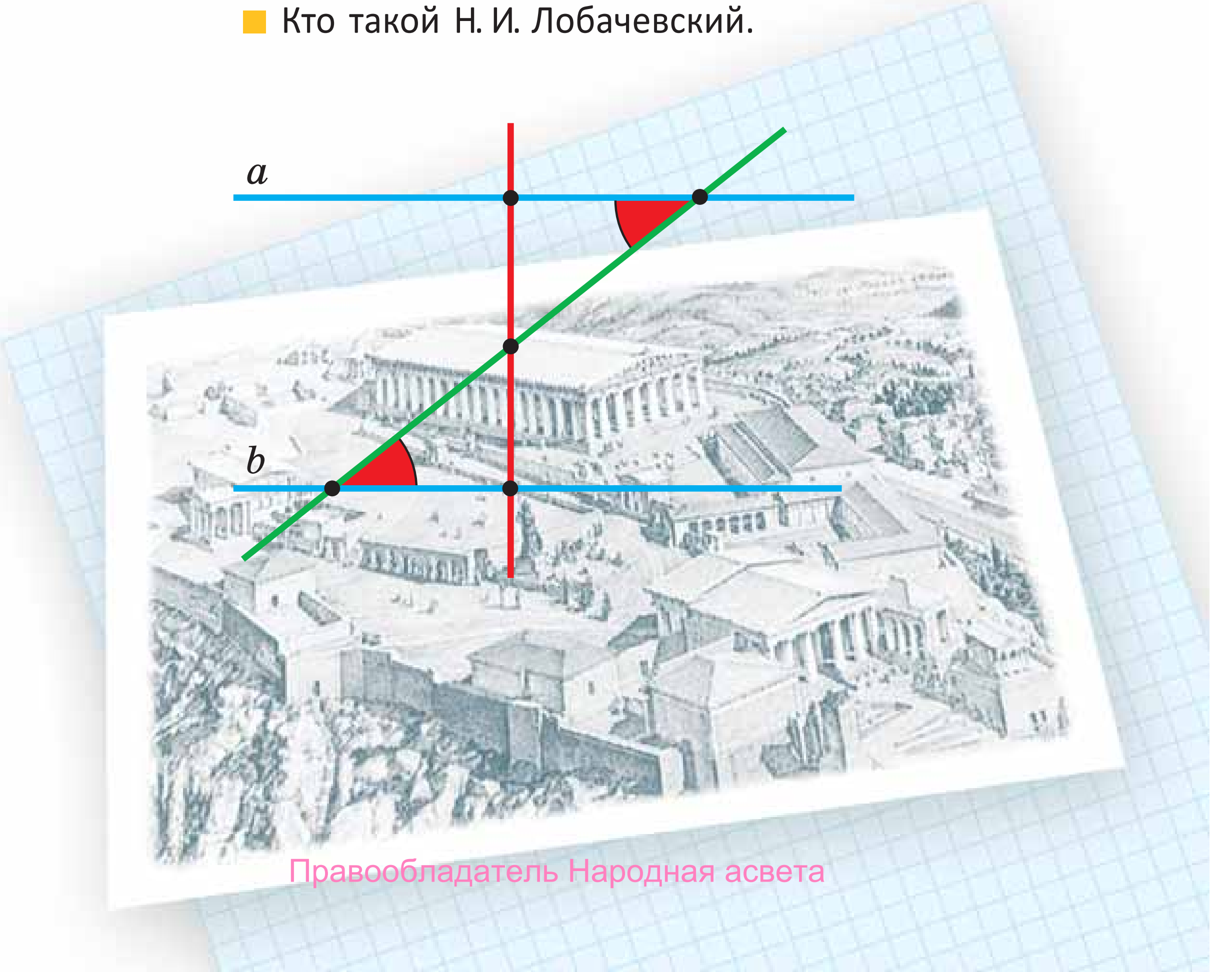

Дополнительные материалы к главе можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, курс «Математика» — «Математика. 7 класс», модуль «Признаки равенства треугольников».

Глава III

# Параллельность прямых на плоскости

**В этой главе вы узнаете:**

- Признаки и свойства параллельных прямых.
- В чем заключается аксиома параллельных прямых.
- Кто такой Н. И. Лобачевский.



# § 15. Признаки параллельности прямых

## 15.1. Две прямые, перпендикулярные третьей

Параллельность прямых — одно из основных понятий геометрии. Параллельность часто встречается в жизни. Посмотрев вокруг, можно убедиться, что мы живем в мире параллельных линий. Это края парты, столбы вдоль дороги, полоски «зебры» на пешеходном переходе.

> Определение. Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

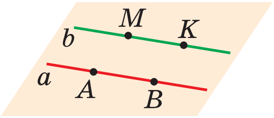



*Рис. 160*

*Лучи* и *отрезки* называются *параллельными*, если они лежат на параллельных прямых. Если прямые $a$ и $b$ параллельны, то есть $a \parallel b$ (рис. 160), то параллельны отрезки $AB$ и $MK$, отрезок $MK$ и прямая $a$, лучи $AB$ и $KM$.

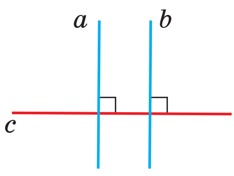



*Рис. 161*

Вы уже знаете теорему о параллельных прямых на плоскости: «*Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой*». Другими словами, если $a \perp c$, $b \perp c$, то $a \parallel b$ (рис. 161). Данная теорема позволяет решить две важные практические задачи.

**Первая задача** заключается в проведении нескольких параллельных прямых.

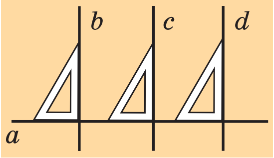



*Рис. 162*

Пусть дана прямая $a$ (рис. 162). При помощи чертежного треугольника строят прямую $b$, перпендикулярную прямой $a$. Затем сдвигают треугольник вдоль прямой $a$ и строят другую перпендикулярную прямую $c$, затем — третью прямую $d$ и т. д. Поскольку прямые $b$, $c$, $d$ перпендикулярны одной прямой $a$, то из указанной теоремы следует, что $b \parallel c$, $c \parallel d$, $b \parallel d$.

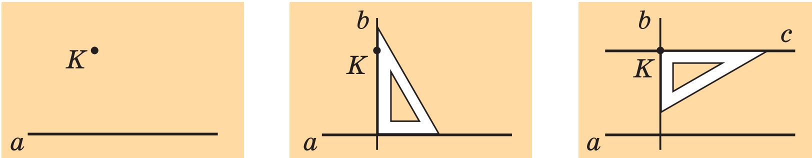



*Рис. 163*

**Вторая задача** — проведение прямой, параллельной данной и проходящей через точку, не лежащую на данной прямой.

По рисунку 163 объясните процесс проведения прямой $c$, параллельной прямой $a$ и проходящей через точку $K$.

Из построения следует: так как $a \perp b$ и $c \perp b$, то $a \parallel c$. Решение второй задачи доказывает теорему о существовании прямой, параллельной данной, которая гласит:

**Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной.**

## 15.2. Накрест лежащие, соответственные и односторонние углы

При пересечении двух прямых $a$ и $b$ третьей прямой $c$, которая называется *секущей*, образуется 8 углов (рис. 164).

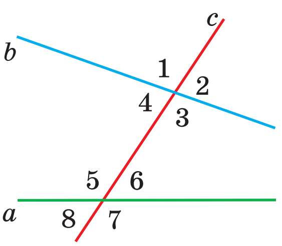



*Рис. 164*

Некоторые пары этих углов имеют специальные названия: $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ — ***внутренние накрест лежащие углы***; $\angle 2$ и $\angle 8$, $\angle 1$ и $\angle 7$ — ***внешние накрест лежащие углы***; $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$ — ***соответственные углы***; $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$ — ***внутренние односторонние углы***; $\angle 2$ и $\angle 7$, $\angle 1$ и $\angle 8$ — ***внешние односторонние углы***.

На рисунке 165 отмечены углы 1 и 2. Они являются внутренними накрест лежащими углами при прямых $BC$ и $AD$ и секущей $BD$. В этом легко убедиться, продлив отрезки $BC$, $AD$ и $BD$. Ответьте: какими по взаимному расположению являются $\angle ABC$ и $\angle BAD$ относительно прямых $BC$ и $AD$ и секущей $AB$?

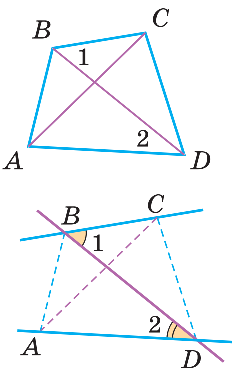
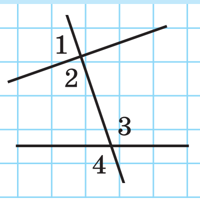



*Рис. 165*

А теперь выполните **Тест 1**.

**Тест 1**

Среди углов 1, 2, 3 и 4 назовите накрест лежащие, соответственные и односторонние углы.




## 15.3. Признаки параллельности прямых

С указанными парами углов связаны следующие признаки параллельности прямых.

Теорема (первый признак параллельности прямых). **Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.**

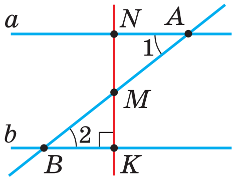



*Рис. 166*

Дано: $a$ и $b$ — данные прямые, $AB$ — секущая, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 166).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство. Из середины $M$ отрезка $AB$ опустим перпендикуляр $MK$ на прямую $b$ и продлим его до пересечения с прямой $a$ в точке $N$. Треугольники $BKM$ и $ANM$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AM = MB$, $\angle 1 = \angle 2$ по условию, $\angle BMK = \angle AMN$ как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $\angle ANM = \angle BKM = 90°$. Тогда прямые $a$ и $b$ перпендикулярны прямой $NK$. А так как две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой, то $a \parallel b$.

Теорема доказана.

Теорема (второй признак параллельности прямых). **Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.**

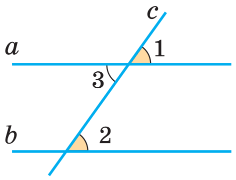



*Рис. 167*

Дано: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 167).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство. Углы 1 и 3 равны как вертикальные. А так как углы 1 и 2 равны по условию, то углы 2 и 3 равны между собой. Но углы 2 и 3 — внутренние накрест лежащие при прямых $a$ и $b$ и секущей $c$. А мы знаем, что если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Значит, $a \parallel b$. Теорема доказана.

Теорема (третий признак параллельности прямых). **Если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.**

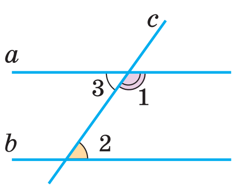



*Рис. 168*

Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (рис. 168).

Доказать: $a \parallel b$.

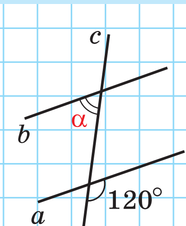
Доказательство. Углы 1 и 3 — смежные, поэтому их сумма равна 180°. А так как сумма углов 1 и 2 равна 180° по условию, то углы 2 и 3 равны между собой. Но углы 2 и 3 — внутренние накрест лежащие при прямых $a$ и $b$ и секущей $c$. А мы знаем, что если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Значит, $a \parallel b$. Теорема доказана.

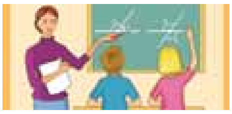
Сформулируйте и докажите аналогичные признаки для внешних накрест лежащих и внешних односторонних углов.

А теперь выполните **Тест 2**.

## Тест 2

Сколько градусов должен составлять угол $\alpha$, чтобы прямые $a$ и $b$ были параллельны?





## Задания к § 15

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *Доказать, что если отрезки $AD$ и $BC$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то прямые $AB$ и $CD$ параллельны.*

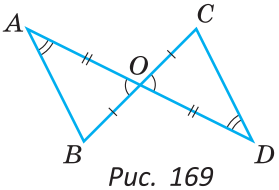


*Рис. 169*

Доказательство. Пусть $O$ — точка пересечения отрезков $AD$ и $BC$ (рис. 169). Треугольники $AOB$ и $DOC$ равны по двум сторонам и углу между ними ($\angle AOB = \angle DOC$ как вертикальные, $BO = OC$, $AO = OD$ по условию). Из равенства треугольников следует, что $\angle BAO = \angle CDO$. Так как эти углы — накрест лежащие при прямых $AB$ и $CD$ и секущей $AD$, то $AB \parallel CD$ по признаку параллельности прямых.

**Задача 2.** *На биссектрисе угла $BAC$ взята точка $K$, а на стороне $AC$ — точка $D$, $\angle BAK = 26°$, $\angle ADK = 128°$. Доказать, что отрезок $KD$ параллелен лучу $AB$.*

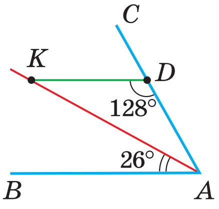


*Рис. 170*

Доказательство. Так как $AK$ — биссектриса угла $BAC$ (рис. 170), то $\angle BAC = 2 \cdot \angle BAK = 2 \cdot 26° = 52°$. Углы $ADK$ и $BAC$ — внутренние односторонние при прямых $KD$ и $BA$ и секущей $AC$. А поскольку $\angle ADK + \angle BAC = 128° + 52° = 180°$, то $KD \parallel AB$ по признаку параллельности прямых.

**Задача 3.** *Биссектриса $BC$ угла $ABD$ отсекает на прямой $a$ отрезок $AC$, равный отрезку $AB$. Доказать, что прямые $a$ и $b$ параллельны* (рис. 171).

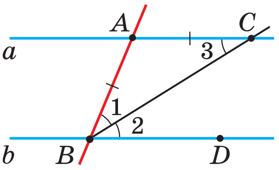


*Рис. 171*

Доказательство. Так как $BC$ — биссектриса угла $ABD$, то $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\triangle BAC$ равнобедренный ($AB = AC$ по условию), то $\angle 1 = \angle 3$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Тогда $\angle 2 = \angle 3$. Но углы 2 и 3 являются накрест лежащими при прямых $a$ и $b$ и секущей $BC$. А если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Следовательно, $a \parallel b$.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**128.** Среди углов 1, 2, 3, 4 и 5 укажите накрест лежащие, соответственные и односторонние углы (рис. 172).

**129.** Выясните, какие из изображенных прямых параллельны и почему (рис. 173—175).

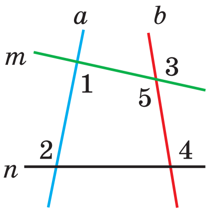



*Рис. 172*

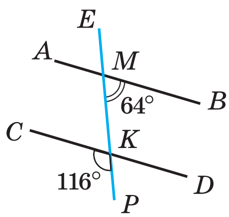



*Рис. 173*

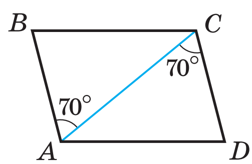



*Рис. 174*

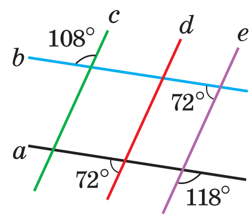



*Рис. 175*

**130.** В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

**131.** Докажите, что $a \parallel b$, если: а) $\angle 1 = 87°$, $\angle 2 = 93°$; б) $\angle 1 = 116°$, $\angle 2 = 64°$; в) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (рис. 176—178).

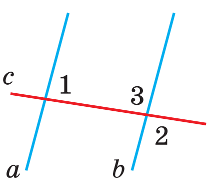



*Рис. 176*

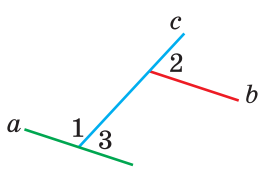



*Рис. 177*

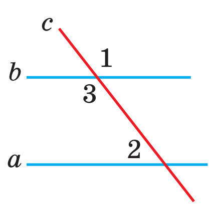



*Рис. 178*

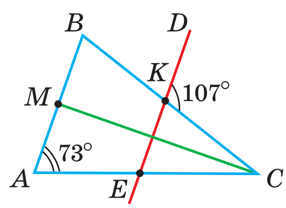



*Рис. 179*

**132.** Биссектриса $CM$ треугольника $ABC$ делит сторону $AB$ пополам, $\angle BAC = 73°$, $\angle DKC = 107°$ (рис. 179). Докажите, что $ED \parallel AB$.

**133.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AM$, к которой проведен серединный перпендикуляр, пересекающий прямую $AB$ в точке $E$. Докажите, что $EM \parallel AC$.

**134.** Из точек $A$ и $B$ прямой $a$ в одну полуплоскость проведены лучи $AK$ и $BM$ так, что угол $KAB$ составляет 20 % угла $MBA$, а угол $MBA$ составляет $\frac{5}{6}$ развернутого угла. Пересекаются ли прямые $AK$ и $BM$?

**135.** На рисунке 180 $AK$ — биссектриса угла $BAC$. Докажите, что $DK \parallel AC$, если: а) $\angle BDK = 54°$, $\angle KAC = 27°$; б) $\angle BDK = 2\angle KAC$.

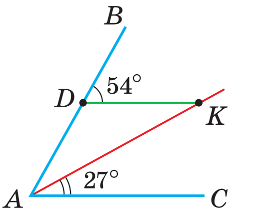



*Рис. 180*

**136*.** Докажите, что прямые $AB$ и $CD$, расположенные на координатной плоскости, параллельны, если $A(-6;\ 0)$, $B(0;\ -4)$, $C(6;\ 0)$, $D(0;\ 4)$.

**137*.** *Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны.* Докажите, что если у четырехугольника противоположные стороны равны, то этот четырехугольник — параллелограмм (рис. 181).

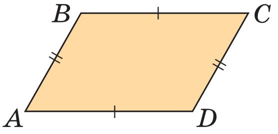



*Рис. 181*

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Определение параллельных прямых.
2. Теорему о двух прямых, перпендикулярных третьей.
3. Названия некоторых пар углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей.
4. Признаки параллельности прямых.

**Умеем**

1. Проводить при помощи чертежного треугольника параллельные прямые.
2. Проводить при помощи чертежного треугольника прямую, параллельную данной прямой и проходящую через точку, не лежащую на данной прямой.
3. Определять на рисунке пары накрест лежащих, соответственных и односторонних углов.
4. Доказывать признаки параллельности прямых.

## *Геометрия 3D*

1. У куба отрезали угол (рис. 182). Сколько всего вершин, ребер и граней у полученного многогранника? Если $В$ — число вершин, $Г$ — число граней, $Р$ — число ребер, то чему будет равно число $В + Г - Р$? Знаменитая формула великого математика Леонарда Эйлера (XVII в.) утверждает, что для любого многогранника $В + Г - Р = 2$. Проверьте эту формулу для параллелепипеда, для треугольной и четырехугольной пирамид.

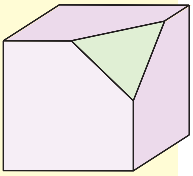


*Рис. 182*

2. Определите, сколько у изображенного многогранника пар параллельных ребер, где каждая пара параллельных ребер принадлежит какой-то одной грани.

3*. Нарисуйте развертку этого многогранника.

## *Моделирование*

Команда *«Десять градусов лево руля»* на корабле означает поворот судна на 10° влево от курса.

а) Какую команду должен дать командир корабля «Б» (рис. 183) рулевому, чтобы корабли «А» и «Б» шли параллельными курсами?

б) Если командир корабля «А» даст команду *«Пять градусов лево руля»*, то какую команду после этого должен дать командир корабля «Б», чтобы корабли шли параллельными курсами?

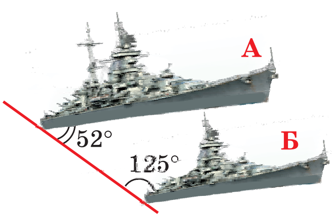



*Рис. 183*

## *Реальная геометрия*

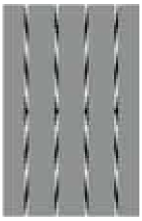
На рисунке 184 изображен электронный угломер — инструмент для нанесения параллельных линий на рейке или доске. Прибор состоит из двух частей, скрепленных винтом. Одна часть неподвижная, она прижимается к доске, а другая поворачивается на необходимый угол, градусная мера которого отражается на экране угломера. Зажав винт, закрепляют нужный угол. Сдвинув неподвижную часть угломера вдоль доски, наносят новую линию разметки. Так получают параллельные линии, по которым затем распиливают доску.

*Рис. 184*

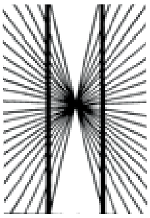
Объясните, согласно какой теореме получаемые линии будут параллельны.

### *Гимнастика ума*

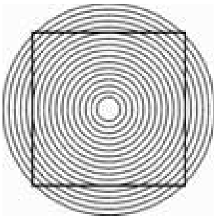
Определите визуально, то есть на глаз, на каком из рисунков изображены параллельные отрезки (рис. 185). Проверьте ваш ответ линейкой.



*а)*



*б)*



*в)*

*Рис. 185*

## § 16. Аксиома параллельных прямых

Вы уже знаете, что на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, *можно* провести прямую, параллельную данной (см. § 15). Из пятого постулата Евклида (*постулат* — аксиоматическое предположение) следует, что такая прямая — единственная.

*Н. И. Лобачевский*

На протяжении двух тысячелетий вокруг утверждения о единственности параллельной прямой разыгрывалась захватывающая и драматичная история! Со времен Древней Греции математики спорили о том, можно доказать пятый постулат Евклида или нет. То есть это теорема или аксиома? В конце концов работы русского математика **Н. И. Лобачевского** (1792—1856) позволили выяснить, что доказать пятый постулат нельзя. Поэтому это утверждение является *аксиомой*.

Аксиома параллельных прямых. **Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.**

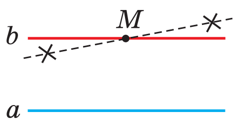



*Рис. 186*

Если прямая $b$ проходит через точку $M$ и параллельна прямой $a$ (рис. 186), то любая другая прямая, проходящая через точку $M$, будет пересекаться с прямой $a$ в некоторой точке, пусть и достаточно удаленной.

Поиски доказательства пятого постулата Евклида привели к развитию математики и физики, к пересмотру научных представлений о геометрии Вселенной. Решая проблему пятого постулата, Лобачевский создал новую геометрию, с новыми аксиомами, теоремами, отличающуюся от *геометрии Евклида*, которая теперь так и называется — *геометрия Лобачевского*.

Вы уже знаете, что на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой. А если две прямые параллельны третьей прямой, то что можно сказать про первые две прямые? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема (о двух прямых, параллельных третьей). **На плоскости две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.**

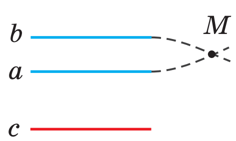



*Рис. 187*

Дано: $a \parallel c$, $b \parallel c$ (рис. 187).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство. Предположим, что прямые $a$ и $b$ не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке $M$. Поэтому через точку $M$ будут проходить две прямые $a$ и $b$, параллельные третьей прямой $c$. А это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, наше предположение неверно и $a \parallel b$. Теорема доказана.

## Метод доказательства «от противного»

При доказательстве теоремы о двух прямых, параллельных третьей, мы применили метод доказательства *от противного* (то есть «от противоположного»). Суть его в следующем. Утверждение любой теоремы делится на *условие* — то, что в теореме дано, и *заключение* — то, что нужно доказать.

В доказанной выше теореме условие: «*Каждая из двух прямых параллельна третьей прямой*», а заключение: «*Эти две прямые параллельны между собой*».

Используя метод от противного, предполагают, что из данного условия теоремы следует утверждение, противоположное (противное) заключению теоремы. Если при сделанном предположении путем логических рассуждений приходят к какому-либо утверждению, противоречащему аксиомам или ранее доказанным теоремам, то сделанное предположение считается неверным, а верным — ему противоположное.

В доказательстве нашей теоремы мы предположили, что эти две прямые не параллельны, а пересекаются в точке. И пришли к выводу, что тогда нарушается аксиома параллельных прямых. Следовательно, наше предположение о пересечении прямых не верно, а верно ему противоположное: прямые не пересекаются, то есть параллельны.

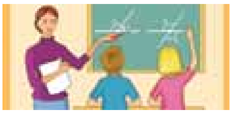
Методом от противного ранее была доказана теорема о двух прямых, перпендикулярных третьей.

Данный метод является очень мощным логическим инструментом доказательства. Причем не только в геометрии, но и в любом аргументированном споре.

Используя аксиому параллельных прямых и метод от противного, докажите самостоятельно следующую теорему.

Теорема. **Если на плоскости прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.**


При помощи **Интернета** выясните, могли ли встречаться великий писатель *Лев Толстой* и великий математик *Николай Лобачевский*. Если да, то где была наибольшая вероятность их встречи?



## Задания к § 16

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

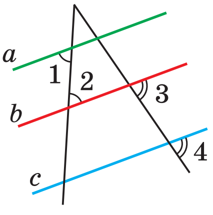



Рис. 188

**Задача 1.** *На рисунке* 188 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. *Доказать, что* $a \parallel c$.

Доказательство. Так как накрест лежащие углы 1 и 2 равны, то $a \parallel b$ по признаку параллельности прямых. Так как соответственные углы 3 и 4 равны, то по признаку параллельности прямых $c \parallel b$. Так как $a \parallel b$ и $c \parallel b$, то $a \parallel c$ по теореме о двух прямых, параллельных третьей.

**Задача 2.** *Доказать, что если сумма внутренних односторонних углов при двух данных прямых и секущей меньше* 180°, *то эти прямые пересекаются.*

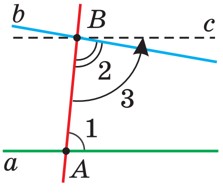



Рис. 189

Доказательство. Пусть $a$ и $b$ — данные прямые, $AB$ — их секущая, сумма углов 1 и 2 меньше 180° (рис. 189). Отложим от луча $AB$ угол 3, который в сумме с углом 1 дает 180°. Получим прямую $c$, которая параллельна прямой $a$ по признаку параллельности прямых. Если предположить, что прямые $a$ и $b$ не пересекаются, а, значит, параллельны, то через точку $A$ будут проходить две прямые $b$ и $c$, которые параллельны прямой $a$. Это противоречит аксиоме параллельных прямых. Следовательно, прямые $a$ и $b$ пересекаются.

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**138.** На рисунке 190 $\angle 1 = 52°$, $\angle 2 = 52°$, $\angle 3 = 122°$, $\angle 4 = 58°$. Докажите, что $a \parallel c$.

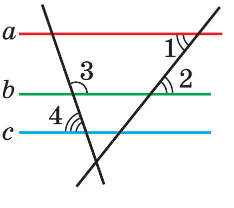



Рис. 190

**139.** Среди прямых $a$, $b$, $c$ и $d$, лежащих в одной плоскости, определите пары параллельных прямых, если известно, что $a \perp b$, $c \perp b$, $a \perp d$.

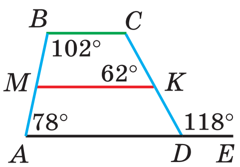



Рис. 191

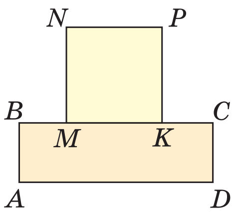



Рис. 192

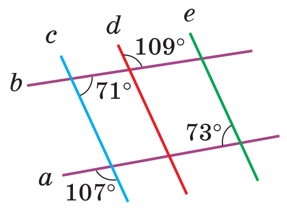



Рис. 193

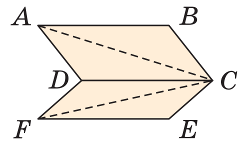



Рис. 194

**140.** Выясните, пересекутся ли при продолжении отрезки $MK$ и $BC$ (рис. 191).

**141.** На рисунке 192 $ABCD$ — прямоугольник, $MNPK$ — квадрат. Докажите, что $NP \parallel AD$, $AB \parallel PK$.

**142.** Определите все пары параллельных прямых (рис. 193).

**143.** На рисунке 194 $\angle BAC = 28°$, $\angle ACD = 28°$, $\angle DFC = 35°$, $\angle EFC = 15°$, $\angle FDC = 130°$. Докажите, что $AB \parallel FE$.

**144*.** Если две параллельные прямые пересечь двумя другими перпендикулярными им параллельными прямыми, получим прямоугольник. Сколько всего прямоугольников можно насчитать в прямоугольной таблице, у которой 2 строки и 3 столбца?

## § 17. Свойства параллельных прямых

Вы знаете, что если две прямые пересечены секущей и накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Это признак параллельности прямых. Обратное утверждение звучит так: «Если две прямые параллельны и пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны». Это утверждение верно, и оно выражает свойство параллельных прямых. Докажем его и два других свойства для соответственных и односторонних углов.

Теорема (о свойстве накрест лежащих углов при параллельных прямых и секущей).
**Если две параллельные прямые пересечены секущей, то внутренние накрест лежащие углы равны.**

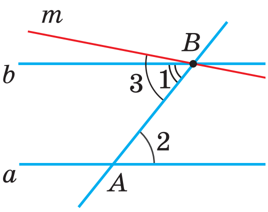



*Рис. 195*

Дано: $a \parallel b$, $AB$ — секущая, $\angle 1$ и $\angle 2$ — внутренние накрест лежащие (рис. 195).

Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.

Доказательство. Предположим, что $\angle 1 \neq \angle 2$. Отложим от луча $BA$ угол 3, равный углу 2. Так как внутренние накрест лежащие углы 2 и 3 равны, то $m \parallel a$ по признаку параллельности прямых. Получили, что через точку $B$ проходят две прямые $b$ и $m$, параллельные прямой $a$. А это невозможно по аксиоме параллельных прямых. Следовательно, наше предположение неверно и $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

Теорема (о свойстве соответственных углов при параллельных прямых и секущей).
**Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.**

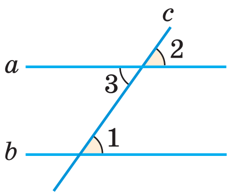



*Рис. 196*

Дано: $a \parallel b$, $c$ — секущая, $\angle 1$ и $\angle 2$ — соответственные (рис. 196).

Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.

Доказательство. Углы 1 и 3 равны как накрест лежащие при параллельных прямых $a$ и $b$. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

Теорема (о свойстве односторонних углов при параллельных прямых и секущей).
**Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.**

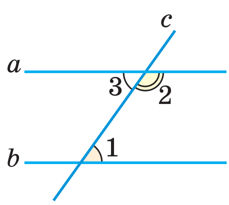



*Рис. 197*

Дано: $a \parallel b$, $c$ — секущая, $\angle 1$ и $\angle 2$ — внутренние односторонние (рис. 197).

Доказать: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Доказательство. Углы 2 и 3 — смежные. По свойству смежных углов $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. По свойству параллельных прямых $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие. Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Теорема доказана.

Сформулируйте и докажите самостоятельно аналогичные свойства для внешних накрест лежащих и внешних односторонних углов.

**Следствие.**

*Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой прямой.*

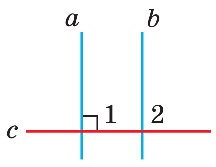


*Рис. 198*

Докажите это следствие самостоятельно.

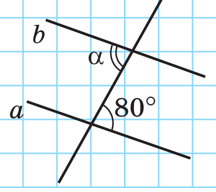
На рисунке 198 $a \parallel b$ и $c \perp a$, т. е. $\angle 1 = 90°$. Согласно следствию $c \perp b$, т. е. $\angle 2 = 90°$.

Доказанные нами теоремы о свойствах углов при двух параллельных прямых и секущей являются обратными признакам параллельности прямых. Чтобы не путать признаки и свойства параллельных прямых, нужно помнить следующее: а) если ссылаются на признак параллельности прямых, то требуется доказать параллельность некоторых прямых; б) если ссылаются на свойство параллельных прямых, то параллельные прямые даны, и нужно воспользоваться каким-то их свойством.

А теперь выполните **Тест 1** и **Тест 2**.

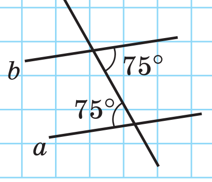
### Тест 1

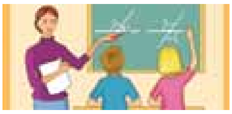
На контрольной работе Саша решал задачу: «Дано, что $a \parallel b$. Найдите угол $\alpha$». Он записал: «Угол $\alpha$ равен 80° по признаку параллельности прямых». Прав ли Саша? Если нет, то на какую теорему нужно сослаться?




### Тест 2

Маша решала задачу: «По углам на рисунке выясните, как расположены прямые $a$ и $b$». Она записала: «$a \parallel b$ по свойству параллельных прямых». Права ли Маша? Если нет, то на какую теорему нужно сослаться?





## Задания к § 17

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *Доказать, что если отрезки AB и CD равны и параллельны, а отрезки AD и BC пересекаются в точке O, то треугольники AOB и DOC равны.*

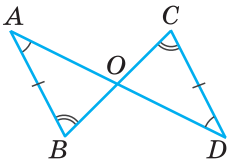



*Рис. 199*

Доказательство. Углы $BAD$ и $CDA$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых $AB$ и $CD$ и секущей $AD$ (рис. 199). Углы $ABC$ и $DCB$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых $AB$ и $CD$ и секущей $BC$. Тогда $\triangle AOB = \triangle DOC$ по стороне и двум прилежащим к ней углам. Что и требовалось доказать.

**Задача 2.** *Доказать, что отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя другими пересекающими их параллельными прямыми, равны между собой.*

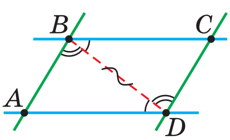



*Рис. 200*

Доказательство. Пусть $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ (рис. 200). Докажем, что $AB = CD$, $BC = AD$. Проведем отрезок $BD$. У треугольников $ABD$ и $CDB$ сторона $BD$ — общая, $\angle ABD = \angle CDB$ как накрест лежащие при параллельных прямых $AB$ и $CD$ и секущей $BD$, $\angle ADB = \angle CBD$ как накрест лежащие при параллельных прямых $BC$ и $AD$ и секущей $BD$. Тогда треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Из равенства треугольников следует, что $AB = CD$, $BC = AD$. Что и требовалось доказать.

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**145.** На рисунке 201 $m \parallel n$. Найдите угол, обозначенный знаком вопроса.

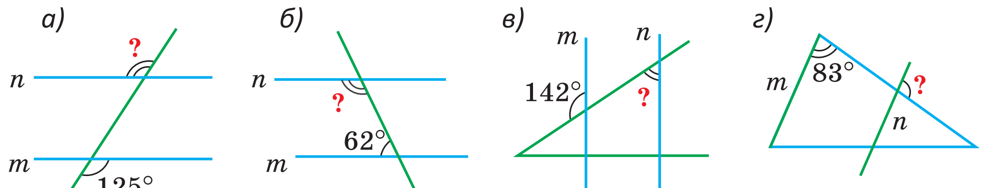



*Рис. 201*

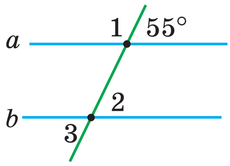



Рис. 202

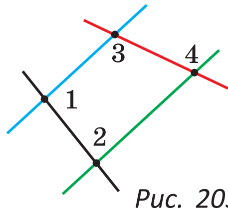



Рис. 203

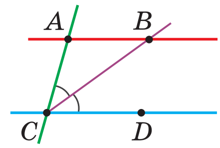



Рис. 204

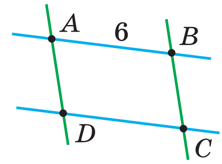



Рис. 205

**146.** На рисунке 202 $a \parallel b$. Найдите сумму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

**147.** На рисунке 203 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 + \angle 4 = 240°$. Найдите угол 4.

**148.** На рисунке 204 $AB \parallel CD$, $CB$ — биссектриса угла $ACD$, $AC = 14$ см, $BC = 22$ см. Найдите периметр треугольника $ABC$.

**149.** На рисунке 205 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, $AB = 6$ см, периметр четырехугольника $ABCD$ равен 20 см. Найдите длину отрезка $AD$.

**150.** Внутренние односторонние углы при двух параллельных прямых и секущей относятся как $2 : 3$. Найдите больший из этих углов.

**151.** Один из внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей на 40° меньше другого. Найдите меньший из этих углов.

**152.** В треугольнике $ABC$ провели биссектрису $BK$, а из вершины $C$ — прямую, параллельную $BK$, которая пересекает продолжение стороны $AB$ в точке $E$. Докажите, что треугольник $BEC$ — равнобедренный.

**153.** Докажите, что если у четырехугольника $ABCD$ $AB = CD$, $AB \parallel CD$, то $BC \parallel AD$.

**154.** Найдите угол, обозначенный знаком вопроса (рис. 206).

**155.** На биссектрисе угла $ABC$ взята точка $K$, на стороне $BC$ — точка $M$ такая, что $KM \parallel AB$, $\angle BKM = 36°$. Найдите угол $CMK$.

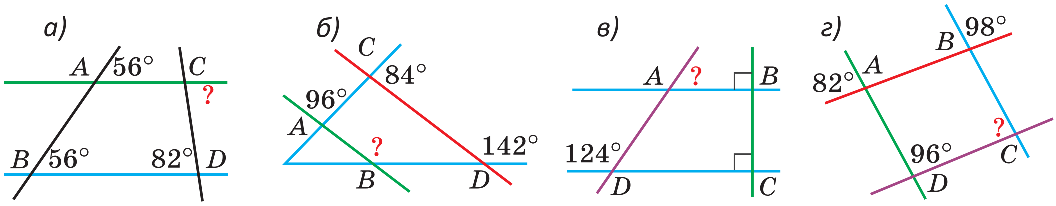



Рис. 206

**156.** Концы отрезка $AB$ лежат на параллельных прямых $a$ и $b$. Точка $O$ — середина отрезка $AB$. Докажите, что любой другой отрезок с концами на прямых $a$ и $b$, проходящий через точку $O$, делится ею пополам.

**157.** Докажите, что прямая, которая пересекает боковую сторону равнобедренного треугольника и параллельна его основанию, отсекает от него равнобедренный треугольник.

**158.** На рисунке 207 $\triangle ABC$ — равносторонний с периметром 36 см, $MK \parallel BC$, $NP \parallel AC$, $EF \parallel AB$ и $KM + MN + NP = PE + EF + FK$. Найдите периметр шестиугольника $KMNPEF$.

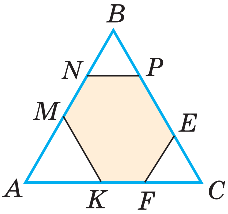


*Рис. 207*

**159*.** На рисунке 208 $MN \parallel AC$. Докажите, что если $O$ — точка пересечения биссектрис углов $A$ и $C$, то $AM + CN = MN$. Найдите длину стороны $AC$, если периметр треугольника $ABC$ равен 34 см, а периметр треугольника $MBN$ — 26 см.

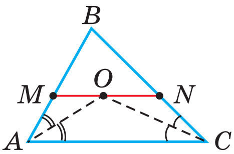


*Рис. 208*

**160*.** Две прямые пересекаются в точке, лежащей за пределами листа (рис. 209). Как можно измерить угол между этими прямыми, используя чертежный треугольник и транспортир?

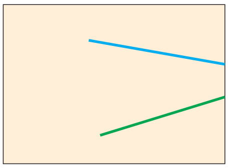
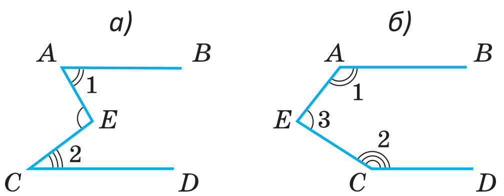


*Рис. 209*

**161*.** Докажите, что если у четырехугольника противоположные стороны параллельны, то его противоположные углы равны между собой.

**162*.** Докажите, что если $AB \parallel CD$, то: а) $\angle AEC = \angle 1 + \angle 2$; б) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$ (рис. 210).

*Рис. 210*



## ПОДВОДИМ ИТОГИ

### Знаем

1. Аксиому параллельных прямых.
2. Теорему о двух прямых, параллельных третьей.
3. Свойства накрест лежащих, соответственных и односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей.

### Умеем

1. Доказывать теорему о двух прямых, параллельных третьей.
2. Доказывать теорему о свойстве накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей.
3. Доказывать теорему о свойстве соответственных углов при двух параллельных прямых и секущей.
4. Доказывать теорему о свойстве односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей.

## *Геометрия 3D*

*Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек (не пересекаются).*

Если плоскости $\alpha$ и $\beta$ параллельны, то пишут: $\alpha \parallel \beta$ (рис. 211).

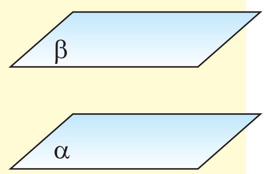



*Рис. 211*

Существует еще один вид многогранников — *призмы* (рис. 212). У призмы две грани (основания) — равные многоугольники, которые лежат в параллельных плоскостях, а остальные грани (боковые) — параллелограммы (задача 137).

У *прямой призмы* боковые грани — прямоугольники, боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований и равны между собой. На рисунке 212 изображены треугольная и четырехугольная прямые призмы. У них параллельны плоскости верхней и нижней граней. Перенесите изображения призм в тетрадь. Укажите, какие грани этих призм являются невидимыми.

**Задача.** *Сколько проволоки пойдет на изготовление каркаса прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, у которой все ребра равны по 12 см?*

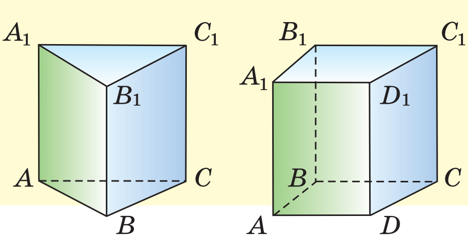
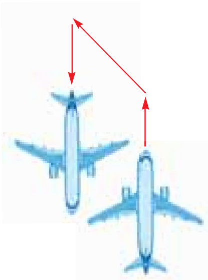



*Рис. 212*



### *Моделирование*

Пассажирский самолет летел строго на север. Затем, не меняя высоты, он изменил курс, повернув влево на 45°. Вскоре экипажу поступила команда лететь на юг. На сколько градусов пилот должен во второй раз повернуть самолет, чтобы лететь на требуемый курс на юг? Сделайте чертеж, обозначив положение самолета точками. Предложите несколько способов нахождения ответа.

*П. О. Сухой*

***Интересно знать.*** В истории авиации значительное место занимает выдающийся авиаконструктор П. О. Сухой, который родился и вырос в г. Глубокое (Витебская область). В конструкторском бюро Сухого было создано более 50 конструкций гражданских и военных самолетов.

П. О. Сухой поистине является гордостью земли белорусской.

При помощи **Интернета** выясните, какую школу закончил П. О. Сухой (1895—1975) и с какими результатами, какое получил образование после школы, в каком городе он работал учителем математики и кем был его отец.

## § 18*. Углы с соответственно параллельными и соответственно перпендикулярными сторонами.

Теорема (об углах с соответственно параллельными сторонами).
**Углы с соответственно параллельными сторонами или равны (если оба острые или оба тупые), или в сумме составляют 180° (если один острый, а другой тупой).**

1) Острые углы 1 и 2 (рис. 213, *а*) — это углы с соответственно параллельными сторонами. Используя рисунок, докажите самостоятельно, что углы 1 и 2 равны.

2) Острый угол 1 и тупой угол 2 (рис. 213, *б*) — это углы с соответственно

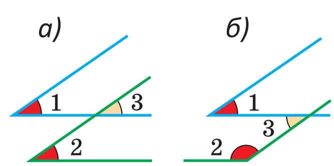



*Рис. 213*

параллельными сторонами. Используя этот рисунок и результат пункта 1), докажите, что сумма углов 1 и 2 равна 180°.

Теорема (об углах с соответственно перпендикулярными сторонами).
**Углы с соответственно перпендикулярными сторонами или равны (если оба острые или оба тупые), или в сумме составляют 180° (если один острый, а другой тупой).**

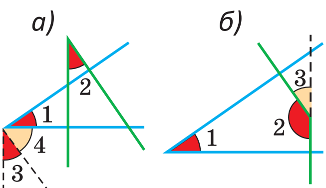



*Рис. 214*

Доказательство. 1) Острые углы 1 и 2 — это углы с соответственно перпендикулярными сторонами (рис. 214, *а*). Построим острый угол 3 в вершине угла 1, стороны которого параллельны сторонам угла 2. Стороны угла 3 перпендикулярны сторонам угла 1 (прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, перпендикулярна и другой прямой). По предыдущей теореме $\angle 2 = \angle 3$. Поскольку угол 1 и угол 3 дополняют угол 4 до 90°, то $\angle 1 = \angle 3$. Значит, $\angle 1 = \angle 2$.

2) Острый угол 1 и тупой угол 2 — это углы с соответственно перпендикулярными сторонами (рис. 214, *б*). Используя этот рисунок и результат пункта 1), докажите самостоятельно, что сумма углов 1 и 2 равна 180°.

## Задачи к § 18

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

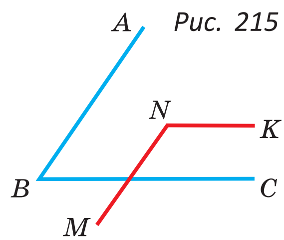



*Рис. 215*

**163.** На рисунке 215 $AB \parallel MN$, $BC \parallel NK$ и $\angle ABC : \angle MNK = 1 : 2$. Найдите $\angle MNK$.

**164.** На рисунке 216 $KB \perp AB$, $BC \perp AC$, $CD \perp AB$, $DE \perp AC$, $EP \perp AB$, $\angle AEP = 58°$. Найдите $\angle KBC$.

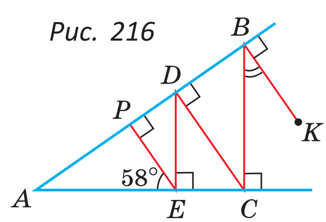



*Рис. 216*

**165.** Два угла со взаимно параллельными сторонами относятся как 2 : 7. Найдите, на сколько градусов один из них больше другого.

**166.** На сторонах угла $A$, равного $90°$, взяты точки $B$ и $C$ (рис. 217). Из точки $A$ на прямую $BC$ опущен перпендикуляр $AD$. Сумма углов $ACB$ и $DAB$ равна $138°$. Найдите угол $ACB$.

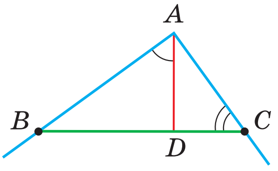


*Рис. 217*

**167.** Докажите, что если $a \parallel b$, $c \parallel d$, $AM \perp b$, $AK \perp d$, то $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 218).

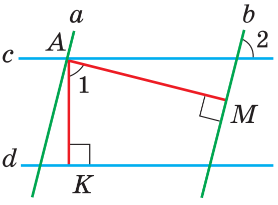


*Рис. 218*

**168.** У углов $ABC$ и $MNK$ $AB \parallel MN$, $BC \perp NK$. Выясните, как могут быть связаны градусные меры углов $ABC$ и $MNK$. Рассмотрите все варианты.

**169.** Докажите, что прямые $AB$ и $CD$, расположенные на координатной плоскости, параллельны, если $A(-2;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $C(2;\ -4)$, $D(4;\ -1)$.

**170*.** Выясните, верно ли утверждение: «Если два угла равны и какие-то две их стороны параллельны, то и две другие стороны этих углов параллельны».

**171*.** Выясните, верно ли утверждение: «Если два угла равны и какие-то две их стороны перпендикулярны, то и две другие стороны этих углов перпендикулярны».

## ЗАПОМИНАЕМ

1. Признаки параллельности прямых: «Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов равна $180°$, то прямые параллельны».
2. Свойства параллельных прямых: «Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны и сумма односторонних углов равна $180°$».
3. На плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.
4. На плоскости две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.
5. Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, будет перпендикулярна и другой прямой.

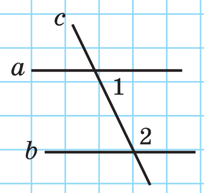
**6*.** Углы с соответственно параллельными сторонами или равны, или в сумме составляют $180°$.

**7*.** Углы с соответственно перпендикулярными сторонами или равны, или в сумме составляют $180°$.

## Проверяем себя

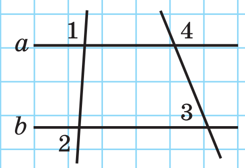
### Тест 1

Известно, что $a \parallel b$ и $\angle 1$ на $50^\circ$ меньше $\angle 2$. Найдите $\angle 1$.



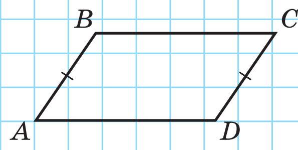

### Тест 2

Найдите $\angle 4$, если известно, что $\angle 1 = 96^\circ$, $\angle 2 = 84^\circ$, $\angle 3 = 76^\circ$.




### Тест 3

Докажите, что если $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то $BC = AD$ и $BC \parallel AD$.



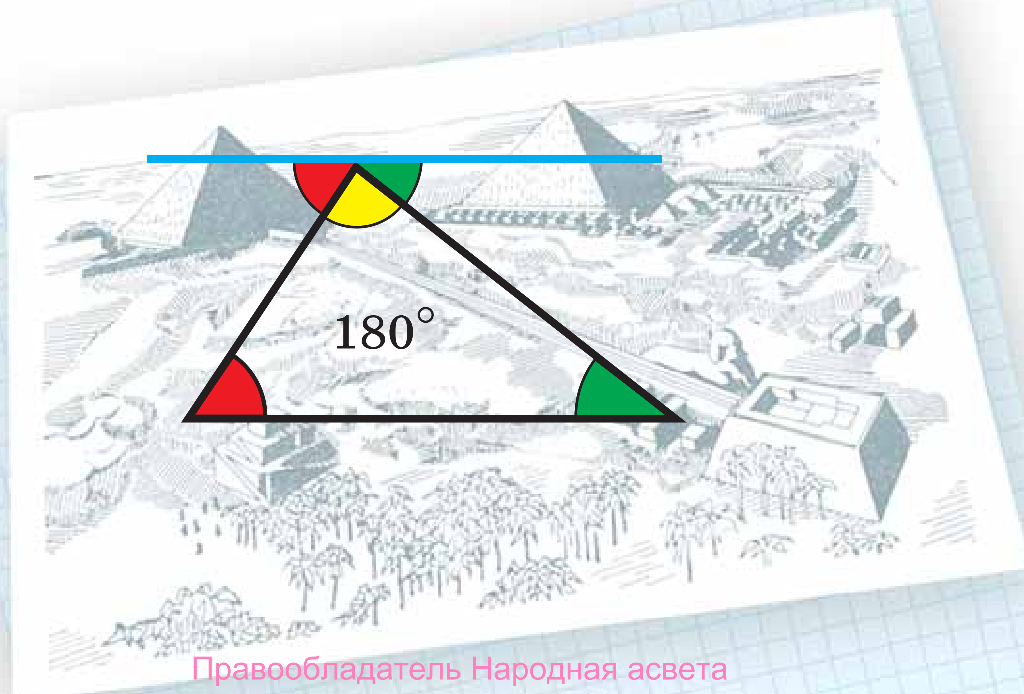

Дополнительные материалы к главе можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, курс «Математика» — «Математика. 7 класс», модуль «Параллельность прямых на плоскости».

Глава IV

# Сумма углов треугольника

**В этой главе вы узнаете:**

- Какой угол называется внешним углом треугольника.
- В чем состоит неравенство треугольника.
- Пять признаков равенства прямоугольных треугольников.
- Свойство точек биссектрисы угла.
- Свойство катета, лежащего против угла в 30°.



## § 19. Сумма углов треугольника

*Блез Паскаль*

Великий французский ученый XVII в. Блез Паскаль (1623—1662) еще в детстве любил изучать геометрические фигуры, открывать их свойства, измерять углы транспортиром. Юный исследователь заметил, что у любого треугольника сумма углов одна и та же — 180°. «Как же это объяснить?» — думал Паскаль. Тогда он отрезал у треугольника два уголка и приложил их к третьему (рис. 219). Получился развернутый угол, который, как известно, равен 180°. Это было его первое собственное открытие! Дальнейшая судьба мальчика была предопределена.

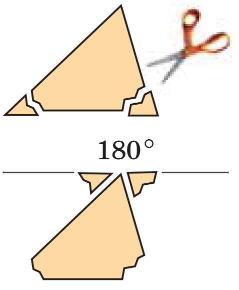



*Рис. 219*

**Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°.**

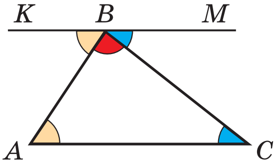



*Рис. 220*

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 220).

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Доказательство. Через вершину $B$ треугольника $ABC$ проведем прямую $KM$, параллельную стороне $AC$. Тогда $\angle KBA = \angle A$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых $KM$ и $AC$ и секущей $AB$, а $\angle MBC = \angle C$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых $KM$ и $AC$ и секущей $BC$. Так как углы $KBA$, $ABC$ и $MBC$ образуют развернутый угол, то $\angle KBA + \angle ABC + \angle MBC = 180°$. Отсюда $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Теорема доказана.

### *Следствия.*

**1.** *Каждый угол равностороннего треугольника равен* 60° (рис. 221).

**2.** *Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна* 90° (рис. 222).

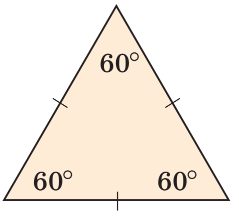



*Рис. 221*

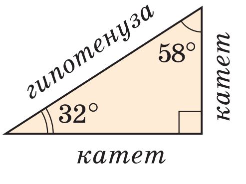



*Рис. 222*

В прямоугольном треугольнике стороны, заключающие прямой угол, называются *катетами*, сторона, противолежащая прямому углу, — *гипотенузой* (см. рис. 222).

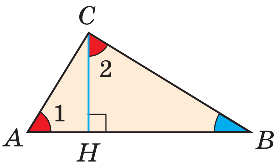



*Рис. 223*

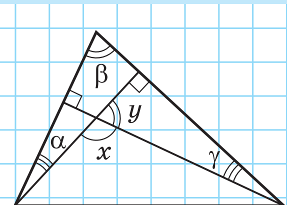
Проведем в прямоугольном треугольнике $ABC$ высоту $CH$ к гипотенузе $AB$ (рис. 223). Так как в треугольнике $ABC$ угол 1 дополняет угол $B$ до $90°$, а в треугольнике $CHB$ угол 2 также дополняет угол $B$ до $90°$, то $\angle 1 = \angle 2$.

Доказано свойство: «*Угол между высотой прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, и катетом равен углу между другим катетом и гипотенузой*».

А теперь выполните **Тест**.

**Тест**

В треугольнике провели две высоты, угол $\alpha$ равен $20°$. Найдите углы $\beta$, $\gamma$, $y$, $x$.




## Задания к § 19

**РЕШАЕМ ВМЕСТЕ**

**ключевые задачи**

**Задача 1.** *В треугольнике ABC градусные меры углов A, B и C относятся соответственно как* $5 : 7 : 3$. *Найти углы треугольника* (рис. 224).

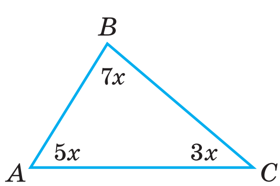



*Рис. 224*

Решение. Пусть $\angle A = 5x$, $\angle B = 7x$, $\angle C = 3x$ ($x$ — градусная мера одной части). Так как сумма углов треугольника равна $180°$, то $5x + 7x + 3x = 180°$, $15x = 180°$, $x = \dfrac{180°}{15} = 12°$.

Тогда $\angle A = 5 \cdot 12° = 60°$, $\angle B = 7 \cdot 12° = 84°$, $\angle C = 3 \cdot 12° = 36°$.

Ответ: $\angle A = 60°$, $\angle B = 84°$, $\angle C = 36°$.

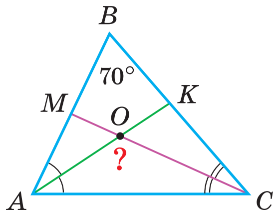


*Рис. 225*

**Задача 2.** *В треугольнике ABC* (рис. 225) *угол B равен* 70°, *AK и CM — биссектрисы, O — точка их пересечения. Найти угол AOC между биссектрисами.*

Решение. Сумма углов $A$ и $C$ треугольника $ABC$ равна $180° - 70° = 110°$. Так как биссектриса делит угол пополам, то $\angle OAC + \angle OCA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) =$ $= \frac{1}{2} \cdot 110° = 55°$.

Из треугольника $AOC$ находим: $\angle AOC = 180° - 55° = 125°$.

Ответ: 125°.

*Замечание.* Если $\angle B = \beta$, то, рассуждая аналогично, получим формулу: $\angle AOC = 90° + \frac{\beta}{2}$. Если, например, $\angle B = 60°$, то $\angle AOC = 90° + \frac{60°}{2} = 120°$.

**Задача 3.** *Доказать, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то данный треугольник — прямоугольный.*

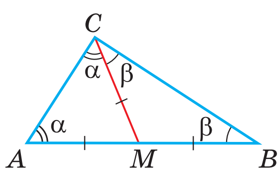


*Рис. 226*

Доказательство. Пусть $CM$ — медиана $\triangle ABC$ и $CM = \frac{1}{2}AB$ (рис. 226). Докажем, что $\angle ACB = 90°$. Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Так как медиана делит сторону пополам, то $AM = MB = \frac{1}{2}AB$. Тогда $CM = AM = MB$. Так как $\triangle AMC$ — равнобедренный, то $\angle A = \angle ACM = \alpha$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Аналогично, $\triangle CMB$ — равнобедренный и $\angle B = \angle BCM = \beta$. Сумма углов треугольника $ABC$, с одной стороны, равна $2\alpha + 2\beta$, с другой — равна 180°. Отсюда $2\alpha + 2\beta = 180°$, $2(\alpha + \beta) = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$. Но $\angle ACB = \alpha + \beta$, поэтому $\angle ACB = 90°$.

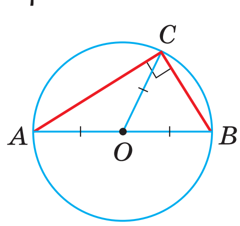


*Рис. 227*

*Замечание.* Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным*. На рисунке 227 это угол $ACB$. Из задачи 3 следует свойство: «*Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой*». Докажите это свойство самостоятельно.

**Задача 4.** *Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.*

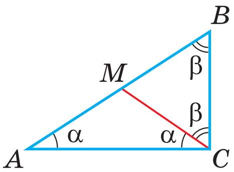



*Рис. 228*

Доказательство. Пусть в треугольнике $ABC$ (рис. 228) $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Проведем отрезок $CM$ так, что $\angle ACM = \alpha$, и докажем, что $CM$ — медиана и что $CM = \frac{1}{2}AB$. Угол $B$ дополняет угол $A$ до $90°$, а $\angle BCM$ дополняет $\angle ACM$ до $90°$. Поскольку $\angle ACM = \angle A = \alpha$, то $\angle BCM = \beta$. Треугольники $AMC$ и $BMC$ — равнобедренные по признаку равнобедренного треугольника. Тогда $AM = MC$ и $MB = MC$. Отсюда $CM$ — медиана и $CM = \frac{1}{2}AB$.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**172.** Найдите угол, обозначенный знаком вопроса (рис. 229).

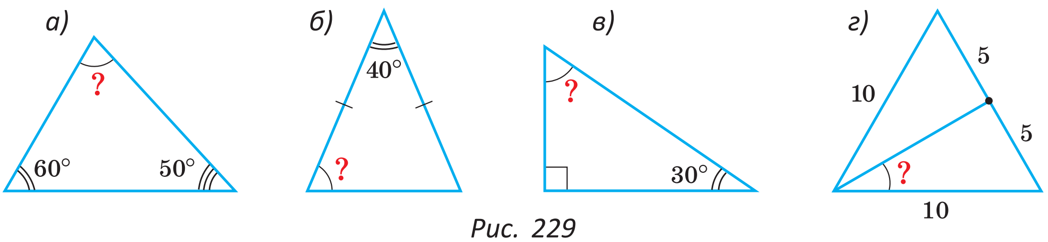



*Рис. 229*

**173.** Найдите угол или сторону, которые обозначены знаком вопроса (рис. 230).

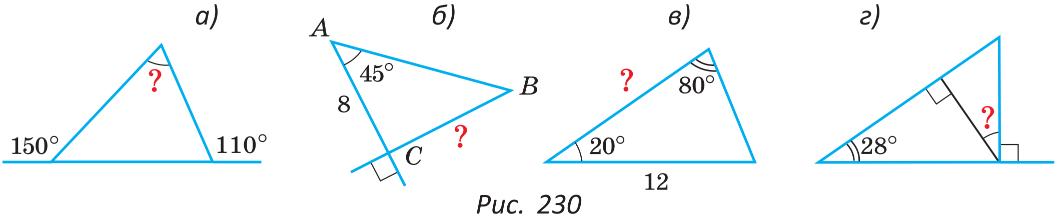



*Рис. 230*

**174.** Углы треугольника относятся как $1 : 3 : 5$. Найдите больший угол треугольника.

**175.** На рисунке 231 $a \parallel b$. Найдите углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. В ответе укажите значение $2\alpha - \beta + \gamma$.

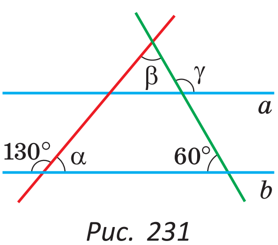



*Рис. 231*

**176.** Один из углов треугольника на $70°$ меньше другого и на $40°$ больше третьего угла. Найдите меньший угол треугольника.

**177.** Докажите, что биссектрисы внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей взаимно перпендикулярны.

**178.** Высота прямоугольного треугольника $ABC$, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол $C$ в отношении $4:5$. Найдите острые углы треугольника $ABC$.

**179.** У равнобедренного треугольника одна из сторон равна 8 см и один из углов равен $60°$. Найдите периметр треугольника.

**180.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 232). Найдите углы всех треугольников, которые являются гранями пирамиды $D_1A_1C_1D$.

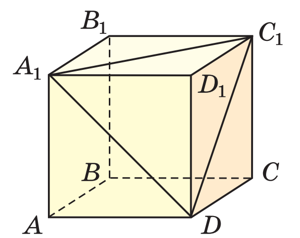


*Рис. 232*

**181.** Треугольник $ABC$ — равнобедренный, $AB = BC$. На луче $AB$ отложен отрезок $BD$ за точку $B$ такой, что $BD = AB$. Докажите, что треугольник $ACD$ — прямоугольный.

**182.** Треугольник $ABC$ — равнобедренный, $AB = BC$, $AK$ — биссектриса, $AK = BK$. Найдите углы треугольника $ABC$.

**183.** В четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$. Найдите угол $BAD$ (рис. 233).

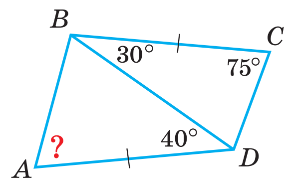


*Рис. 233*

**184.** Три биссектрисы треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Угол $OAC$ равен $32°$. Найдите угол $BOC$.

**185.** В остроугольном треугольнике $ABC$ высоты $AK$ и $CM$ пересекаются в точке $H$. Докажите, что: а) $\angle BAK = \angle BCM$; б) $\angle B = \angle CHK$; в) $\angle AHC + \angle B = 180°$.

**186*.** В треугольнике $ABC$ медиана $BK$ равна отрезку $AK$, $\angle CBK = 24°$. Найдите $\angle A$.

**187*.** Угол между хордой $AB$ и диаметром $AC$ равен $64°$. Найдите угол между хордой $BC$ и этим диаметром.

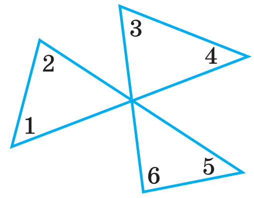



Рис. 234

**188*.** Найдите, чему равна сумма $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$ (рис. 234).

**189*.** Внутри квадрата $ABCD$ взята точка $K$ так, что треугольник $AKD$ равносторонний. Найдите углы треугольника $BKC$.

**190*.** В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота, биссектриса и медиана. Докажите, что биссектриса делит пополам угол между высотой и медианой.

**191*.** Докажите, что: а) сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна 360° (рис. 235, *а*); б) $AB \perp BC$ (рис. 235, *б*); в) $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ (рис. 235, *в*); г) $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$ (рис. 235, *г*).

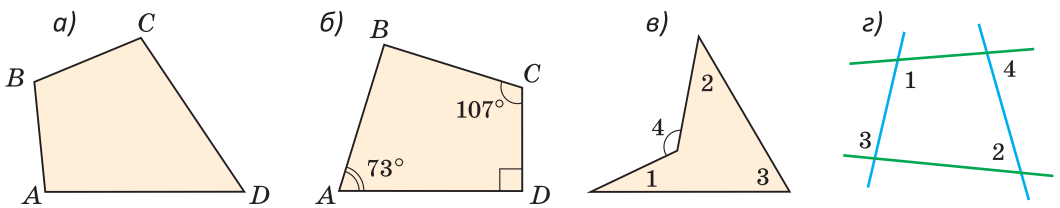



Рис. 235

### *Реальная геометрия*

Яхта вышла в море курсом, который составил с линией берега 45° (рис. 236). Пройдя 4 км, она повернула на 80° влево и прошла еще 4 км. После этого яхта последовала в пункт своего выхода. Определите угол, который составил курс яхты, идущей к берегу, с линией берега.

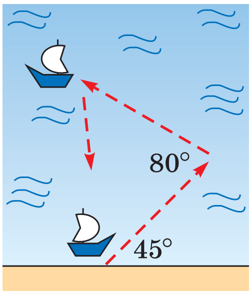



Рис. 236


При помощи **Интернета** выясните другие биографические факты из жизни и научной деятельности ученого Блеза Паскаля.

## § 20. Внешний угол треугольника

Углы треугольника называются еще его внутренними углами. Помимо внутренних углов, у треугольника есть и внешние углы.

Определение. **Внешним углом** треугольника называется угол, смежный с его внутренним углом.

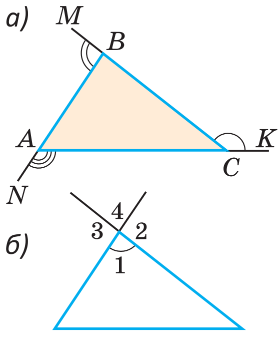


*Рис. 237*

На рисунке 237, *а* углы $BCK$, $ABM$, $CAN$ — внешние, так как каждый из них является смежным с одним из внутренних углов треугольника. При каждой вершине треугольника один угол внутренний и два внешних. На рисунке 237, *б* угол 1 — внутренний, углы 2 и 3 — равные внешние углы. Угол 4 не является внешним, так как он не является смежным с внутренним углом 1.

> Теорема. **Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.**

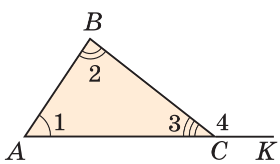


*Рис. 238*

Дано: $\triangle ABC$, $\angle 4$ — внешний (рис. 238).

Доказать: $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

Доказательство. Так как сумма углов треугольника равна $180°$, то $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. Так как сумма смежных углов равна $180°$, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Тогда $\angle 1 + \angle 2 + \cancel{\angle 3} = \cancel{\angle 3} + \angle 4$. Отняв от обеих частей равенства $\angle 3$, получим $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$. Теорема доказана.

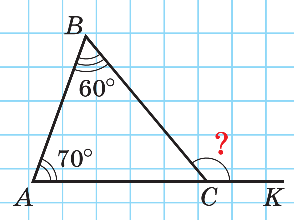
### Следствие.

*Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.*

А теперь выполните **Тест**.

**Тест**

Найдите $\angle BCK$ двумя способами.




## Задания к § 20

**РЕШАЕМ ВМЕСТЕ**

**ключевые задачи**

**Задача 1.** *Доказать, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.*

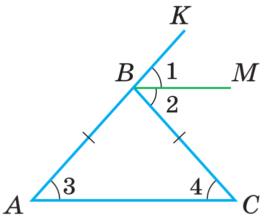



*Рис. 239*

Доказательство. Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$, $BM$ — биссектриса внешнего угла $KBC$, $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle KBC$ (рис. 239). По свойству внешнего угла треугольника $\angle KBC = \angle 3 + \angle 4$. Так как $\triangle ABC$ равнобедренный, то $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle KBC$. Поэтому $\angle 2 = \angle 4$. Поскольку внутренние накрест лежащие углы 2 и 4 равны (при прямых $BM$ и $AC$ и секущей $BC$), то прямые $BM$ и $AC$ параллельны.

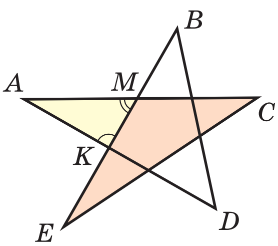



*Рис. 240*

**Задача 2.** *Доказать, что сумма углов A, B, C, D и E «звездочки» равна* 180° (рис. 240).

Решение. Рассмотрим $\triangle AMK$. Сумма его углов равна 180°. Угол $AME$ — внешний для $\triangle EMC$, поэтому $\angle AME = \angle C + \angle E$. Аналогично, угол $AKB$ — внешний для $\triangle KBD$, поэтому $\angle AKB = \angle B + \angle D$. Так как $\angle A + \angle AMK + \angle AKM = 180°$, то $\angle A + (\angle C + \angle E) + (\angle B + \angle D) = 180°$.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**192.** Найдите угол, обозначенный знаком вопроса (рис. 241).

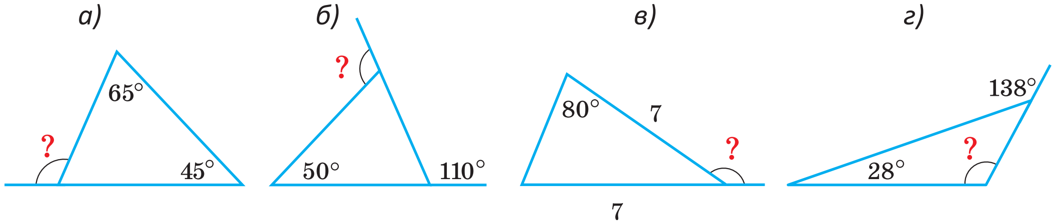



*Рис. 241*

**193.** Найдите угол при основании равнобедренного треугольника, если внешний угол при его вершине равен: а) 110°; б) 73°; в) α.

**194.** Углы треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите отношение соответствующих внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине.

**195.** Сумма внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника и внутреннего угла при основании равна $216°$. Найдите углы треугольника.

**196.** В треугольнике $ABC$ $\angle A = 40°$, $\angle C = 60°$, $AK = AB$, $CM = CB$ (рис. 242). Найдите угол $KBM$.

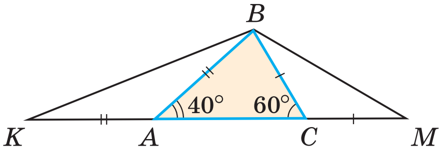



*Рис. 242*

**197.** Дан прямоугольный $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $CK$ — высота $\triangle ABC$, $CM$ — биссектриса $\triangle ACK$. Докажите, что $\triangle BMC$ — равнобедренный.

**198.** В окружности с центром $O$ проведены диаметр $AB$ и хорда $AC$. Докажите, что $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle COB$.

**199*.** В треугольнике $ABC$ $\angle A = 60°$, $\angle C = 70°$, высоты $AK$ и $CM$ треугольника пересекаются в точке $H$. Найдите угол $MHK$.

**200*.** В треугольнике $ABC$ биссектриса $BK$ и высота $AH$ пересекаются в точке $O$. Угол $AOB$ в 2 раза больше угла $ABC$. Найдите угол $ABC$.

**201*.** На основании $AC$ равнобедренного $\triangle ABC$ взята точка $D$, и оказалось, что $AD = BD$, $DC = BC$. Найдите углы $\triangle ABC$.

**202*.** Найдите угол $\alpha$ (рис. 243) (если на чертеже необходимо выделить четыре или более углов, то их отмечают одной дугой).

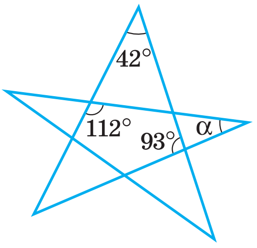



*Рис. 243*

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Теорему о сумме углов треугольника.
2. Свойство углов равностороннего треугольника.
3. Свойство острых углов прямоугольного треугольника.
4. Определение и свойство внешнего угла треугольника.

**Умеем**

1. Изображать внешние углы данного треугольника.
2. Доказывать теорему о сумме углов треугольника.
3. Доказывать теорему о свойстве внешнего угла треугольника.

## Геометрия 3D

**Задача 1.** *DABC — правильная треугольная пирамида, точка K — середина ребра DC,* $\angle AKB = 50°$. *Найдите* $\angle KAB$ (рис. 244).

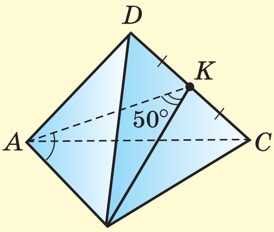



*Рис. 244*

Решение. Так как пирамида правильная, то треугольники $ADC$ и $BDC$ — равные равнобедренные, $AD = BD$, $BD = CD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Тогда $\triangle ADK = \triangle BDK$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $AK = BK$, $\triangle AKB$ — равнобедренный, $\angle KAB = \dfrac{180° - 50°}{2} = 65°$.

Ответ: 65°.

**Задача 2.** *Сделайте чертеж правильной пирамиды DABC, данной в задаче* 1. *Отметьте середину M ребра AD и найдите углы треугольника BMC.*

## Реальная геометрия

Хоккеист посылает шайбу из точки $A$ под углом 20° к правому борту (рис. 245). Шайба, отражаясь от борта, попадает в зону противника и, отразившись второй раз от борта за воротами, выходит в точку $B$ под удар нападающего. Определите угол $\alpha$, если известен закон физики: угол падения равен углу отражения. Из этого закона следует, что угол между траекторией посланной шайбы и бортом, равен углу между траекторией отраженной шайбы и этим бортом.

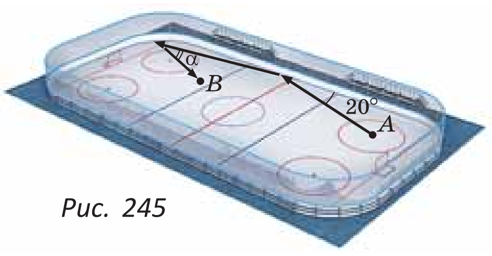



*Рис. 245*

***Интересно знать.*** В Республике Беларусь большое внимание уделяется популяризации хоккея. При участии Президентского спортивного клуба проходит республиканский турнир любительских подростковых команд «Золотая шайба», Рождественский международный турнир на приз Президента Республики Беларусь. В рейтинге Международной федерации хоккея национальная сборная Беларуси находится в списке лучших команд мира.

## § 21. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Можно заметить, что в треугольнике длины сторон связаны с величинами противолежащих углов следующим образом: большей стороне соответствует больший противолежащий угол, а меньшей стороне — меньший. Так, в треугольнике $ABC$ сторона $AC$ — бо́льшая, сторона $AB$ — средняя, сторона $BC$ — меньшая, $\angle B$ — больший, $\angle C$ — средний, $\angle A$ — меньший (рис. 246). Эта гипотеза находит подтверждение в следующей теореме.

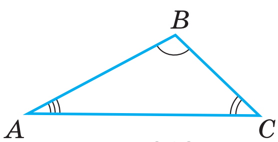


*Рис. 246*

Теорема (о соотношениях между сторонами и углами в треугольнике).
**В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла лежит большая сторона.**

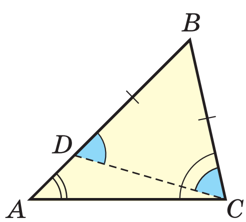


*Рис. 247*

Теорема состоит из двух утверждений. Докажем каждое из них.

1) *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.*

Дано: $\triangle ABC$, $AB > BC$ (рис. 247).

Доказать: $\angle C > \angle A$.

Доказательство. На большей стороне $BA$ от вершины $B$ отложим отрезок $BD$, равный меньшей стороне $BC$, и проведем отрезок $CD$. Получим равнобедренный $\triangle DBC$, у которого углы при основании равны, то есть $\angle BDC = \angle BCD$. Но $\angle BDC$ — внешний для треугольника $ADC$, и поэтому $\angle BDC$ больше $\angle A$. Значит, и $\angle BCD$ больше $\angle A$. А так как $\angle C$ больше $\angle BCD$, то $\angle C$ подавно больше $\angle A$. Утверждение доказано.

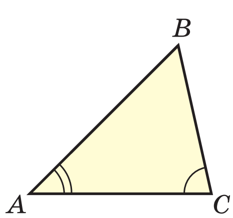


*Рис. 248*

2) *В треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона.*

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C > \angle A$ (рис. 248).

Доказать: $AB > BC$.

Доказательство. Применим метод доказательства от противного. Пусть $\angle C > \angle A$, а

$AB \leqslant BC$. Если $AB < BC$, то по первой части теоремы $\angle C < \angle A$. Получили противоречие с условием. Если $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный, и тогда $\angle A = \angle C$. Снова получили противоречие. Следовательно, $AB > BC$. Утверждение доказано.

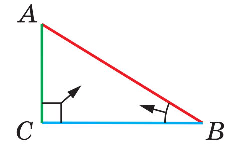
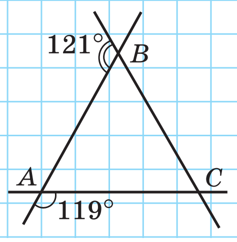



Рис. 249

**Тест 1**

В $\triangle ABC$ укажите бóльшую сторону.




***Следствие 1.***

*Катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы.*

Следствие 1 справедливо, так как катет лежит против острого угла, а гипотенуза — против прямого, который больше острого (рис. 249).

А теперь выполните **Тест 1**.

Определение. Если $AC$ — **перпендикуляр** к прямой $a$, точка $B$ принадлежит прямой $a$ и не совпадает с точкой $C$, то отрезок $AB$ называется **наклонной,** проведенной из точки $A$ к прямой $a$ (рис. 250). Точка $B$ называется **основанием наклонной.** Отрезок $BC$, соединяющий основание наклонной и основание перпендикуляра, называется **проекцией** наклонной $AB$ на прямую $a$.

***Следствие 2.***

*Если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр и проекция наклонной меньше этой наклонной.*

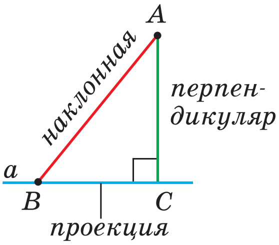



Рис. 250

Следствие 2 справедливо, поскольку в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы.

Определение. **Расстоянием от точки до прямой** называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

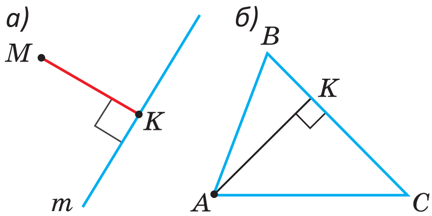



Рис. 251

Если точка лежит на прямой, то это расстояние равно нулю.

Из следствия 2 вытекает, что длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, — это кратчайшее расстояние от данной точки до точек прямой.

На рисунке 251, *а* расстояние от точки $M$ до прямой $m$ равно длине перпендикуляра $MK$.

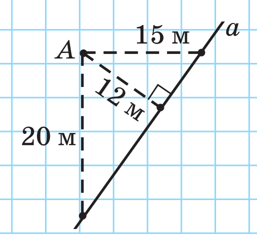
Расстояние от вершины $A$ треугольника $ABC$ до прямой $BC$, содержащей противоположную сторону, равно высоте $AK$ треугольника (рис. 251, *б*).

В математике за расстояние между фигурами принимается наименьшее расстояние между точками этих фигур.

А теперь выполните **Тест 2**.

**Тест 2**

Найдите расстояние от точки $A$ до прямой $a$.




## Задания к § 21

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *Отрезок $AM$ — перпендикуляр к прямой $a$. Точки $B$ и $C$ лежат на прямой $a$ по одну сторону от точки $M$* (рис. 252). *Доказать, что если $CM < BM$, то $AC < AB$.*

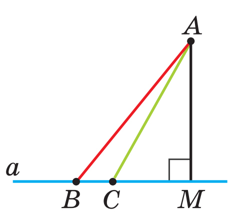



Рис. 252

Доказательство. Так как $\triangle AMC$ — прямоугольный, то $\angle ACM$ — острый. Тогда смежный к нему $\angle ACB$ — тупой. В треугольнике $ABC$ угол $ACB$ — больший, поэтому $\angle ACB > \angle ABC$. Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $AC < AB$. Что и требовалось доказать.

*Замечание.* Решите данную задачу при условии, что точки $B$ и $C$ лежат на прямой $a$ по разные стороны от точки $M$. Тогда будет доказано свойство: «*Если наклонные проведены из одной точки к одной прямой, то большей проекции соответствует большая наклонная, а меньшей — меньшая*».

**Задача 2.** *Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 12 см. Найти расстояние от вершины прямого угла до прямой, содержащей гипотенузу.*

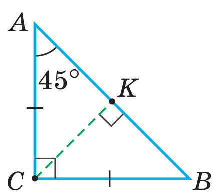


*Рис. 253*

Р е ш е н и е. Пусть в $\triangle ABC$ $AC = BC$, $\angle C = 90°$, $AB = 12$ см (рис. 253). По свойству равнобедренного треугольника $\angle A = \angle B = 45°$. Проведем высоту $CK$. Длина отрезка $CK$ — искомое расстояние. В равнобедренном треугольнике $ACB$ высота $CK$, опущенная на основание $AB$, будет медианой и биссектрисой. Поэтому $AK = KB = \frac{1}{2}AB = 6$ см, $\angle ACK = \frac{1}{2}\angle ACB = 45°$. В прямоугольном $\triangle ACK$ $\angle ACK = \angle CAK = 45°$. Поэтому $\triangle ACK$ — равнобедренный и $CK = AK = 6$ см. О т в е т: 6 см.

*Замечание.* В дальнейшем будем пользоваться тем, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**203.** Запишите стороны и углы треугольника $ABC$, расположенные в порядке возрастания (рис. 254).

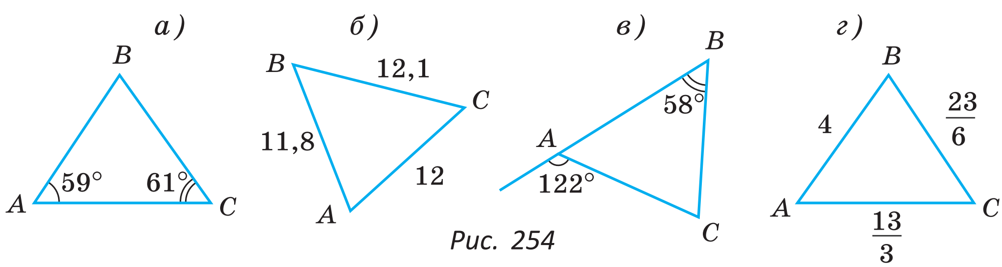


*Рис. 254*

**204.** В $\triangle ABC$, где $AB < BC < AC$, один из углов в 2 раза меньше другого и в 3 раза меньше третьего. Найдите угол $A$.

**205.** Докажите, что для наклонных, проведенных из одной точки к одной прямой, справедливо: а) равным наклонным, проведенным из одной точки к одной прямой, соответствуют равные проекции; б) большей наклонной соответствует большая проекция.

**206.** Треугольник $ABC$ — равносторонний, $M$ — внутренняя точка отрезка $BC$. Докажите, что $AM < AB$.

**207.** В треугольнике $MNK$ медиана $ME$ равна 12 см, $\angle NME = \angle KME$. Найдите расстояние от точки $M$ до прямой $KN$.

**208*.** Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

**209*.** В треугольнике $ABC$ ($AB < BC$) $BH$ — высота, $BM$ — медиана. Докажите, что: а) $\angle ABH < \angle CBH$; б) $\angle ABM > \angle CBM$.

**210*.** Докажите, что если из одной вершины неравнобедренного треугольника провести высоту, медиану и биссектрису, то биссектриса будет лежать между высотой и медианой.

## § 22. Неравенство треугольника

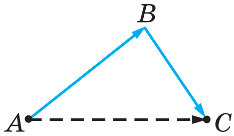


*Рис. 255*

Опыт нам подсказывает, что путь из точки $A$ в точку $C$ по прямой $AC$ короче, чем по ломаной $ABC$ (рис. 255), т. е. $AC < AB + BC$. Докажем это.

Теорема (о неравенстве треугольника). **Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.**

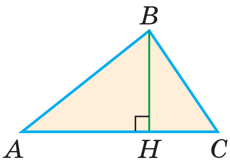


*Рис. 256*

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 256).
Доказать: $AC < AB + BC$, $AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$.

Доказательство. Пусть $AC$ — наибольшая сторона $\triangle ABC$. Проведем высоту $BH$. Из прямоугольного $\triangle AHB$ следует $AH < AB$ (катет меньше гипотенузы). Аналогично из $\triangle CHB$ $HC < BC$. Сложив неравенства, получим $AH + HC < AB + BC$. Откуда $AC < AB + BC$. Два других неравенства $AB < AC + BC$ и $BC < AC + AB$ справедливы, так как $AC$ — наибольшая сторона треугольника. Теорема доказана.

Для сторон $a$, $b$ и $c$ треугольника можно записать неравенства: $a < b + c$, $c < a + b$, $b < a + c$. Каждое из трех указанных неравенств называется *неравенством треугольника*.

### Следствие 1.

*Если для точек $A$, $B$ и $C$ верно, что $AB = AC + BC$, то эти точки лежат на одной прямой. При этом точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$.*

Докажите следствие 1 самостоятельно, используя метод доказательства от противного.

### Следствие 2.

*Длина отрезка, соединяющего концы незамкнутой ломаной, меньше длины ломаной.*

На рисунке 257 изображена незамкнутая ломаная $ABCDE$. Докажем, что $AE < AB + BC + CD + DE$. Соединим точку $A$ с точками $C$ и $D$ отрезками. По неравенству треугольника $AC < AB + BC$ и $AD < AC + CD$. Значит, $AD < AB + BC + CD$. Так как по неравенству треугольника $AE < AD + DE$, то $AE < AB + BC + CD + DE$.

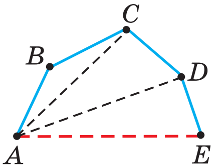


Рис. 257

Чтобы доказать, что данные три числа не могут быть длинами сторон треугольника, достаточно убедиться, что большее из этих чисел не меньше суммы двух других чисел. Например, треугольника со сторонами 21, 12, 35 не существует, так как не выполняется неравенство треугольника: $35 > 12 + 21$ (рис. 258).

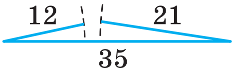


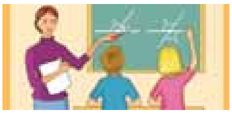
Рис. 258

**Тест**

Две стороны треугольника равны 5 см и 7 см. Может ли периметр этого треугольника быть равным 25 см?

*Замечание.* Из неравенств треугольника $a < b + c$, $c < a + b$, $b < a + c$ следует, что $a - b < c$, $c - a < b$, $b - c < a$, то есть любая сторона треугольника больше разности двух других его сторон. Так, для стороны $a$ справедливо $b - c < a < b + c$.

А теперь выполните **Тест**.



## Задания к § 22

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *Внутри треугольника ABC взята точка M* (рис. 259). *Доказать, что периметр треугольника AMC меньше периметра треугольника ABC.*

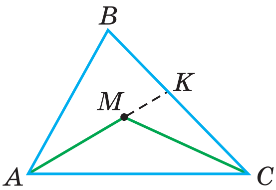


Рис. 259

Решение. Так как у треугольников $ABC$ и $AMC$ сторона $AC$ — общая, то достаточно доказать, что $AM + MC < AB + BC$. Продлим сторону $AM$ до пересечения со стороной $BC$ в точке $K$. Из $\triangle MKC$ по неравенству треугольника $MC < MK + KC$. Тогда $AM + MC < AK + KC$ (1). Из $\triangle ABK$ по неравенству треугольника $AK < AB + BK$, значит, $AK + KC < AB + BC$ (2). Из неравенств (1) и (2) следует, что $AM + MC < AB + BC$. Утверждение доказано.

**Задача 2.** *Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы двух соседних сторон.*

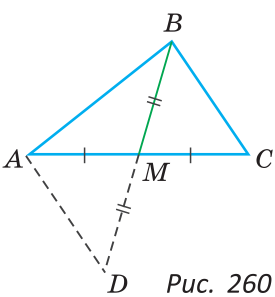


Рис. 260

Доказательство. Докажем, что для медианы $BM$ треугольника $ABC$ справедливо неравенство: $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$ (рис. 260). Продлим медиану $BM$ на ее длину, $MD = BM$, $BD = 2BM$. Треугольники $AMD$ и $CMB$ равны по первому признаку равенства треугольников ($\angle AMD = \angle CMB$ как вертикальные), откуда $AD = BC$. В $\triangle ABD$ по неравенству треугольника $BD < AB + AD$, т. е. $2BM < AB + BC$, $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$. Утверждение доказано.

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**211.** Являются ли точки $A$, $B$ и $C$ вершинами треугольника, если длины отрезков $AB$, $BC$ и $AC$ равны: а) 3 см, 5 см, 4 см; б) 10 см, 4 см, 6 см; в) 5 дм, 62 см, 120 мм?

**212.** а) В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 5 см, другая — 10 см. Найдите периметр треугольника.

б) Периметр равнобедренного треугольника равен 24 см, одна из сторон равна 6 см. Найдите две другие стороны.

**213.** Можно ли из проволоки длиной 45 см изготовить треугольник, две стороны которого равны: а) 25 см и 10 см; б) 13 см и 7 см?

**214.** Докажите, что не существует четырехугольника со сторонами 4 м, 2 м, 6 м, 13 м.

**215.** Докажите, что диаметр — это наибольшая хорда окружности.

**216*.** Две стороны треугольника равны 1 м и 7 м. Найдите периметр треугольника, если известно, что длина третьей стороны выражается целым числом метров.

**217*.** Точка $M$ движется по сторонам треугольника $ABC$, у которого $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $AB = 10$ см. При каком положении точки $M$ сумма ее расстояний до точек $A$ и $B$ будет: а) наибольшей; б) наименьшей?

**218*.** Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до трех его вершин больше полупериметра треугольника.

**219*.** Докажите, что сумма длин боковых ребер треугольной пирамиды $DABC$ больше полупериметра основания $ABC$, то есть что $DA + DB + DC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ (рис. 261, *а*). Выясните, будет ли аналогичное утверждение верно для четырехугольной пирамиды $PABCD$ (рис. 261, *б*).

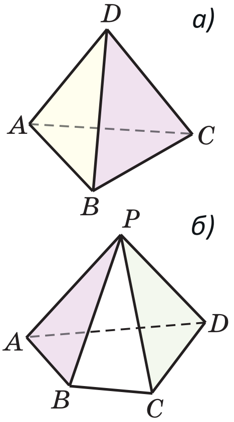


*Рис. 261*

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника.
2. Соотношение катета и гипотенузы, перпендикуляра и наклонной.
3. Определение расстояния от точки до прямой.
4. В чем заключается неравенство треугольника.

**Умеем**

1. По длинам сторон треугольника определять, какой его угол является наибольшим, а какой — наименьшим. По величинам углов определять, какая сторона треугольника наибольшая, какая — наименьшая.
2. Доказывать, что катет меньше гипотенузы.
3*. Доказывать теорему о соотношении сторон и углов треугольника.
4*. Доказывать теорему о неравенстве треугольника.

## § 23. Признаки равенства прямоугольных треугольников

Вы уже знаете три признака равенства треугольников. Поскольку часто приходится иметь дело с прямоугольными треугольниками, то выделяют пять признаков равенства прямоугольных треугольников. Сформулируем и докажем их.

Первый признак (по двум катетам).
**Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.**

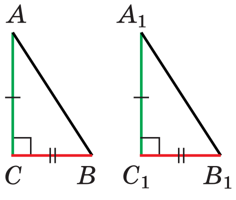


*Рис. 262*

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 262).
Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Доказательство. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.

Второй признак (по катету и прилежащему острому углу).
**Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.**

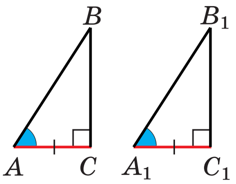



*Рис. 263*

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 263).

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Третий признак (по катету и противолежащему острому углу).

**Если катет и противолежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.**

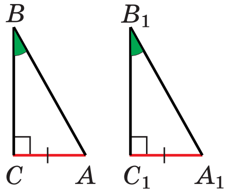



*Рис. 264*

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 264).

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$. Из того, что $\angle B = \angle B_1$, следует, что $\angle A = \angle A_1$. Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Четвертый признак (по гипотенузе и острому углу).

**Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.**

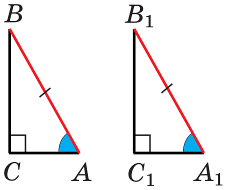



*Рис. 265*

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 265).

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$. Из того, что $\angle A = \angle A_1$, следует, что $\angle B = \angle B_1$. Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Пятый признак (по катету и гипотенузе).
**Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.**

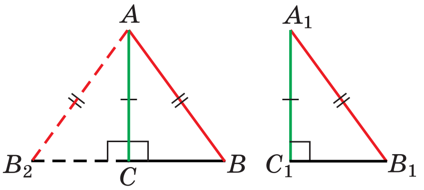


*Рис. 266*

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (рис. 266).

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику $ABC$ так, чтобы совместились равные катеты $A_1C_1$ и $AC$, а вершины $B_1$ и $B$ лежали по разные стороны от прямой $AC$. Треугольник $A_1B_1C_1$ займет положение треугольника $AB_2C$. Так как $\angle B_2CB$ — развернутый и $AB_2 = AB$, то треугольник $B_2AB$ — равнобедренный, катет $AC$ — его высота. По свойству равнобедренного треугольника высота, проведенная к основанию, будет и медианой. Тогда $B_2C = CB$ и треугольники $ABC$ и $AB_2C$ равны по двум катетам. Отсюда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

## Задания к § 23

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *На рисунке* 267 $\angle B = \angle D = 90°$, $BC = AD$. *Доказать равенство треугольников: а*) $\triangle ABC$ *и* $\triangle ADC$; *б*) $\triangle AOB$ *и* $\triangle COD$.

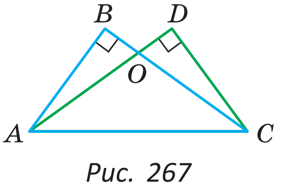


*Рис. 267*

Доказательство. а) Рассмотрим прямоугольные треугольники $ABC$ и $ADC$. У них гипотенуза $AC$ — общая, катеты $AD$ и $BC$ равны по условию. Тогда $\triangle ABC = \triangle ADC$ по катету и гипотенузе.

б) Из равенства треугольников $ABC$ и $ADC$ следует равенство сторон $AB$ и $CD$ (доказано в пункте ***а***). Тогда $\triangle AOB = \triangle COD$ по катету ($AB = CD$) и противолежащему острому углу ($\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные).

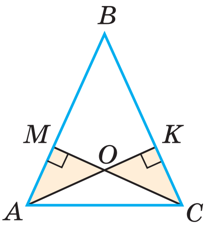


*Рис. 268*

**Задача 2.** *Дан треугольник ABC, AK и CM — его высоты, проведенные к боковым сторонам, O — точка их пересечения* (рис. 268). *Доказать, что если треугольники AOM и COK равны, то треугольник ABC — равнобедренный.*

Доказательство. Так как $\angle AOM = \angle COK$ как вертикальные, то $\angle MAO = \angle KCO$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника $90°$). Из равенства треугольников $AOM$ и $COK$ следует равенство гипотенуз $AO$ и $CO$. Треугольник $AOC$ — равнобедренный, $\angle OAC = \angle OCA$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Тогда $\angle BAC = \angle BCA$ как составленные из равных углов. Треугольник $ABC$ равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Что и требовалось доказать.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**220.** Определите, по какому признаку равны прямоугольные треугольники (рис. 269).

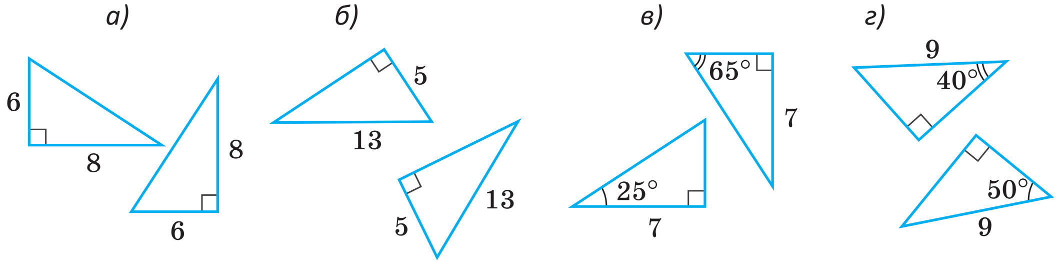


*Рис. 269*

**221.** Докажите, что: а) в равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к боковым сторонам, равны между собой; б) если в треугольнике равны две высоты, то он равнобедренный.

**222.** Докажите, что вершины $A$ и $C$ треугольника $ABC$ равноудалены от прямой, проходящей через медиану $BM$.

**223.** На сторонах угла $A$ взяты точки $M$ и $K$ так, что $AM = AK = 12$ см. Расстояние от точки $M$ до прямой $AK$ равно 8 см. Найдите расстояние от точки $K$ до прямой $AM$.

**224.** Докажите, что равные хорды одной окружности находятся на одинаковом расстоянии от ее центра. Сформулируйте обратное утверждение и докажите его.

**225.** Дан угол $BAC$. На стороне $AC$ взята точка $E$. Через точку $E$ проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла $BAC$, которая пересекает луч $AB$ в точке $F$, а биссектрису — в точке $G$. Найдите периметр треугольника $AFE$, если $AE = 12$ см, а $FG = 4$ см.

**226.** Высоты остроугольного треугольника $ABC$, проведенные из вершин $A$ и $C$, пересекаются в точке $H$. Докажите, что если $AH = CH$, то треугольник $ABC$ равнобедренный.

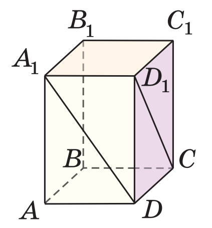


*Рис. 270*

**227*.** В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат $ABCD$ с площадью 36 см$^2$ (рис. 270). Периметр треугольника $DD_1C$ равен 24 см. Диагональ $A_1D$ грани $AA_1D_1D$ равна 10 см. Найдите площадь поверхности параллелепипеда.

**228*.** Отметьте на координатной плоскости точки $A(-4;\ 4)$, $B(2;\ 8)$, $C(6;\ 2)$ и докажите, что треугольник $ABC$ — равнобедренный и прямоугольный.

**229*.** В остроугольном треугольнике $ABC$ высоты $BN$ и $CK$ пересекаются в точке $H$. Найдите угол $C$ треугольника $ABC$, если $CH = AB$.

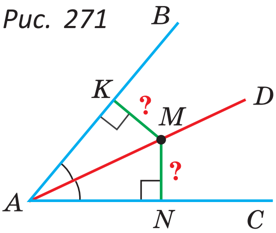
## § 24. Свойство точек биссектрисы угла

По определению биссектриса угла делит угол пополам. У биссектрисы есть еще одно важное свойство.

Теорема (о биссектрисе угла).
**Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла. Если точка внутри угла равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.**

В данной теореме два утверждения: прямое и ему обратное. Докажем каждое из этих утверждений отдельно.

Рис. 271




1) Дано: $AD$ — биссектриса $\angle BAC$, $M \in AD$, $MK \perp AB$, $MN \perp AC$ (рис. 271).

Доказать: $MK = MN$.

Доказательство. Прямоугольные треугольники $AKM$ и $ANM$ равны по гипотенузе и острому углу (гипотенуза $AM$ — общая, $\angle KAM = \angle NAM$, так как $AD$ — биссектриса). Катеты $MK$ и $MN$ равны как соответствующие в двух равных треугольниках.

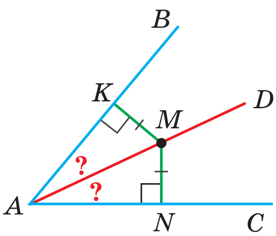



Рис. 272

2) Дано: $\angle BAC$, $MK \perp AB$, $MN \perp AC$, $MK = MN$, $M \in AD$ (рис. 272).

Доказать: луч $AD$ — биссектриса $\angle BAC$.

Доказательство. Прямоугольные треугольники $AKM$ и $ANM$ равны по катету и гипотенузе (гипотенуза $AM$ — общая, $MK = MN$ по условию). Углы $KAM$ и $NAM$ равны как соответствующие в двух равных треугольниках, откуда луч $AD$ — биссектриса $\angle BAC$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что *биссектриса является геометрическим местом точек плоскости, находящихся внутри угла и равноудаленных от сторон угла.*

## Задания к § 24

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

**ключевые задачи**

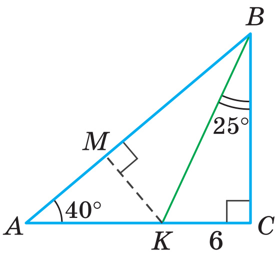



Рис. 273

**Задача 1.** *В прямоугольном треугольнике* $ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 40°$ (рис. 273). *На катете $AC$ взята точка $K$ так, что $KC = 6$ см и $\angle KBC = 25°$. Найти расстояние от точки $K$ до прямой $AB$.*

Решение. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра $KM$ к прямой $AB$. Так как $\angle ABC = 90° - \angle A = 90° - 40° = 50°$, то $\angle ABK = 50° - 25° = 25°$. Следовательно, $BK$ — бис-

сектриса угла $ABC$. Поскольку любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла, то $KM = KC = 6$ см.
Ответ: 6 см.

**Задача 2** (2-я замечательная точка треугольника). *Доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

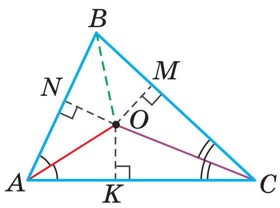



Рис. 274

Доказательство. Проведем в $\triangle ABC$ биссектрисы углов $A$ и $C$. Пусть $O$ — точка их пересечения (рис. 274). Так как точка $O$ лежит на биссектрисе $AO$ угла $A$, то она равноудалена от сторон угла $A$, то есть равны перпендикуляры $ON$ и $OK$ к сторонам угла $A$. Так как точка $O$ лежит на биссектрисе $CO$ угла $C$, она равноудалена от сторон угла $C$, то есть равны перпендикуляры $OK$ и $OM$ к сторонам угла $C$. Тогда $OK = OM = ON$. Так как перпендикуляры $ON$ и $OM$ равны, то точка $O$ равноудалена от сторон угла $B$. Точка, равноудаленная от сторон угла, лежит на биссектрисе этого угла. Поэтому биссектриса угла $B$ пройдет через точку $O$, и, следовательно, все три биссектрисы пересекутся в одной точке.

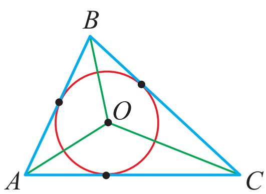



Рис. 275

*Замечание.* Точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной в него окружности (рис. 275), которая касается всех трех сторон треугольника (имеет с каждой из сторон только одну общую точку).

**Задача 3.** *В треугольнике $ABC$ биссектрисы углов $A$ и $B$ пересекаются в точке $K$. Через точку $K$ проведен отрезок $NM$, параллельный стороне $AC$ с концами на сторонах $AB$ и $BC$ соответственно; $AN = 6$ см, $MC = 4$ см. Найти отрезок $NM$.*

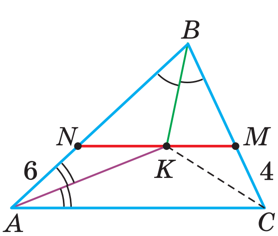



Рис. 276

Решение. Так как биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, то $CK$ — биссектриса угла $C$ (рис. 276). Треугольник $ANK$ — равнобедренный. Действительно, $\angle NAK = \angle CAK$, поскольку $AK$ — биссектриса, $\angle CAK = \angle AKN$ как накрест лежащие при параллельных прямых $NM$ и $AC$ и секущей $AK$, откуда $\angle NAK = \angle AKN$ и треугольник $ANK$ —

равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Тогда $NK = AN = 6$ см. Аналогично доказываем, что треугольник $KMC$ — равнобедренный и $KM = MC = 4$ см. Искомый отрезок $NM = NK + KM = 6 + 4 = 10$ (см).
Ответ: 10 см.

*Замечание.* Решив задачу 3, мы доказали, что если $NM \parallel AC$ и отрезок $NM$ проходит через точку пересечения биссектрис, то периметр $\triangle NBM$ равен $AB + BC$.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**230.** Найдите отрезок или угол, отмеченные знаком вопроса (рис. 277).

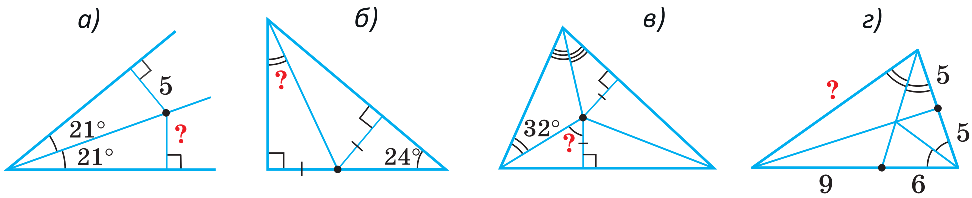



*Рис. 277*

**231.** Точка $K$ находится на равном расстоянии от сторон угла $BAC$, равного 52°. Найдите угол $AKB$.

**232.** Дан треугольник $ABC$, у которого $AC = BC$. На его стороне $AC$ взята точка $M$, равноудаленная от прямых $AB$ и $BC$, и $\angle ABM = 35°$. Найдите угол $C$.

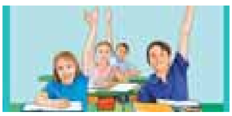
**233.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ из вершины прямого угла $C$ проведена биссектриса $CE$. Из точки $E$ на стороны $CA$ и $CB$ опущены соответственно перпендикуляры $EK$ и $EM$. Найдите периметр четырехугольника $KCME$, если $EK = 7{,}5$ см.

**234.** Докажите, что расстояния от середины основания равнобедренного треугольника до прямых, проходящих через боковые стороны, равны между собой.

**235.** В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AK$ и $CM$ пересекаются в точке $O$ так, что $AO = CO$. Докажите, что прямые $BO$ и $AC$ перпендикулярны.

**236*.** В треугольнике $ABC$ биссектрисы, проведенные из вершин $B$ и $C$, и медиана, проведенная из вершины $A$, пересекаются в точке $O$. Угол $BOC$ равен $130°$. Найдите угол $BAC$.

**237*.** Дан угол $BAC$, $AK$ — его биссектриса. Точка $M$ лежит внутри угла $BAK$. Докажите, что расстояние от точки $M$ до прямой $AB$ меньше расстояния от точки $M$ до прямой $AC$.



## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Пять признаков равенства прямоугольных треугольников.
2. Теорему о биссектрисе угла.

**Умеем**

1. Доказывать признаки равенства прямоугольных треугольников.
2. Доказывать теорему о биссектрисе угла.

## § 25. Свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°

Теорема (о катете, лежащем против угла в 30°). **Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.**

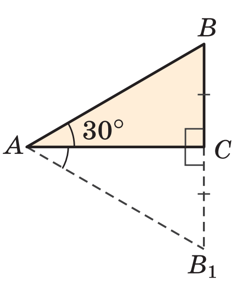



*Рис. 278*

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 278).

Доказать: $BC = \frac{1}{2}AB$.

Доказательство. На луче $BC$ отложим отрезок $CB_1$, равный отрезку $BC$. Так как $\triangle AB_1C = \triangle ABC$ по двум катетам (катет $AC$ — общий), то $\angle B_1AC = \angle BAC = 30°$, $\angle BAB_1 = 60°$. Но $\angle B = \angle B_1 = 60°$. Известно (задача № 89), что если у треугольника все углы равны, то он равносторонний. Отсюда $\triangle ABB_1$ — равносторонний, $AB = BB_1$, $BC = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}AB$. Теорема доказана.

Верно и утверждение, обратное данному. Докажем его.

Теорема. **Если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то этот катет лежит против угла в 30°.**

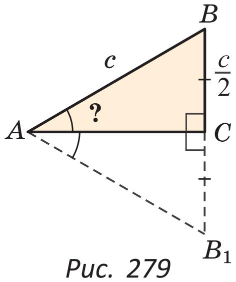
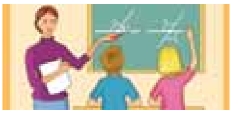


*Рис. 279*

Доказательство. Пусть в треугольнике $ABC$ $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = \frac{c}{2}$ (рис. 279). Докажем, что $\angle BAC = 30°$. Продлим катет $BC$ на его длину: $CB_1 = BC$. Из равенства прямоугольных треугольников $ACB_1$ и $ACB$ (по двум катетам) следует, что $AB_1 = AB = BB_1 = c$. Значит, $\triangle ABB_1$ — равносторонний, все его углы равны по 60°, а его высота $AC$ является биссектрисой. Поэтому $\angle BAC = 30°$. Что и требовалось доказать.



## Задания к § 25

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

### ключевые задачи

**Задача 1.** *В прямоугольном треугольнике $ABC$, у которого $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, проведена высота $CD$. Найти отрезок $AD$, если $BD = 8$ см.*

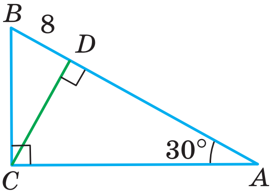


*Рис. 280*

Решение. Так как угол $A$ и угол $BCD$ дополняют угол $B$ до 90°, то $\angle BCD = \angle A = 30°$ (рис. 280). В прямоугольном треугольнике $CDB$ катет $BD$ лежит против угла в 30°. Поэтому $CB = 2BD = 16$ см. В треугольнике $ABC$ катет $BC$ лежит против угла в 30°. Поэтому $AB = 2BC = 32$ см. Отсюда $AD = AB - BD = 32 - 8 = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

*Замечание.* Мы доказали, что $BC = 2BD$, $AB = 2BC = 4BD$, $AD = AB - BD = 3BD$, то есть в прямоугольном треугольнике с углом 30° высота делит гипотенузу в отношении 1 : 3.

**Задача 2.** *Дан прямоугольный треугольник с углом* 15°. *Высота, проведенная к гипотенузе, равна* 2 *см. Найти гипотенузу.*

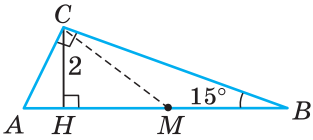



*Рис. 281*

Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике $ABC$ $\angle ACB = 90°$, $\angle B = 15°$, $CH = 2$ см — высота (рис. 281). Нужно найти $AB$.

Проведем медиану $CM$ треугольника $ABC$. Так как в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $CM = MB$. Треугольник $CMB$ — равнобедренный, $\angle MCB = \angle CBM = 15°$, $\angle AMC$ — его внешний угол. По свойству внешнего угла $\angle AMC = \angle MCB + \angle MBC = 15° + 15° = 30°$. В прямоугольном треугольнике $CHM$ катет $CH$ лежит против угла в 30°, поэтому он равен половине гипотенузы $CM$. Отсюда $CM = 2CH = 4$ см, $AB = 2CM = 8$ см.

О т в е т: 8 см.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**238.** Найдите отрезок или угол, обозначенные знаком вопроса (рис. 282). Ответ объясните.

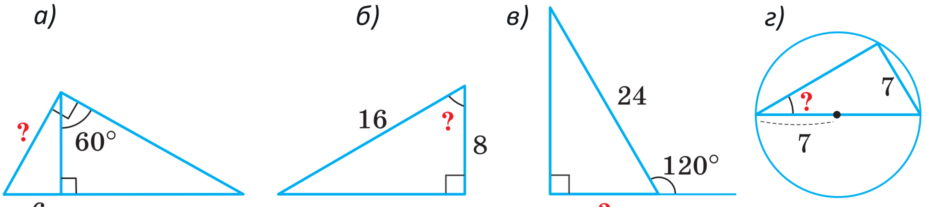



*Рис. 282*

**239.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $AB + BC = 111$ см. Найдите $AB$.

**240.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $BK$. Сумма расстояний от точки $K$ до прямых $BA$ и $BC$ равна 19 см, $\angle C = 30°$. Найдите $KC$.

**241.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ к гипотенузе $AB$ проведена медиана $CM$. Найдите угол между прямыми $CM$ и $AB$, если $BC = 7{,}5$ см, $AB = 15$ см.

**242.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) $\angle B = 120^\circ$, высота $BH$ равна 16 см. Найдите основание $AC$.

**243.** В треугольнике $ABC$ проведены высота $BH$ и медиана $BM$, $BM = \frac{1}{2}AC$, $\angle A = 60^\circ$, $HM = 24$ см. Найдите $HC$.

**244.** Сумма двух углов треугольника равна третьему, а два меньших угла относятся как $1 : 2$. Большая сторона равна 48 см. Найдите отрезки, на которые высота, опущенная из вершины большего угла треугольника, делит противоположную сторону.

**245*.** На рисунке изображен зеленый газон, имеющий форму прямоугольника (рис. 283). Дорожка $AC$ образует угол $30^\circ$ со стороной $DC$, дорожка $DO$ проходит через середину дорожки $AC$. Дорожка $DK$ перпендикулярна дорожке $AC$. Расстояние $KO$ равно 8 м. Найдите длину декоративного заборчика, который огораживает треугольный участок $AOD$.

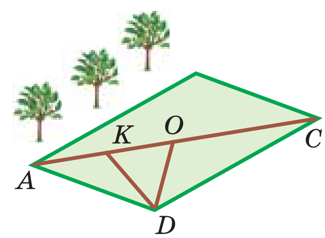


*Рис. 283*

## § 26. Расстояние между параллельными прямыми

Определение. **Расстоянием между параллельными прямыми** называется расстояние от точки одной из этих прямых до другой прямой.

Если $a \parallel b$ и $AB \perp b$, то расстояние между прямыми $a$ и $b$ равно длине перпендикуляра $AB$ (рис. 284). Это расстояние будет наименьшим из всех расстояний от точки $A$ до точек прямой $b$. Следующая теорема гарантирует, что расстояния от всех точек одной из параллельных прямых до другой прямой равны между собой.

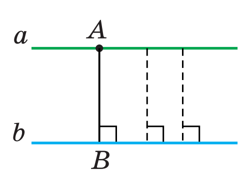


*Рис. 284*

Теорема (о расстоянии между параллельными прямыми).
**Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.**

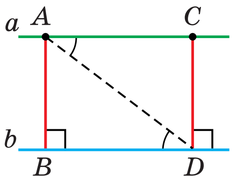


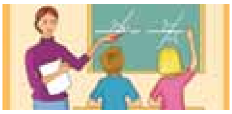

*Рис. 285*

Дано: $a \parallel b$, $A \in a$, $C \in a$, $AB \perp b$, $CD \perp b$.
Доказать: $AB = CD$ (рис. 285).
Доказательство. Проведем отрезок $AD$. Углы $CAD$ и $BDA$ равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых $a$ и $b$ и секущей $AD$. Прямоугольные треугольники $ABD$ и $ACD$ равны по гипотенузе ($AD$ — общая) и острому углу ($\angle CAD = \angle BDA$). Откуда $AB = CD$. Теорема доказана.

**Следствие.**
*Все точки, лежащие в одной полуплоскости относительно данной прямой и равноудаленные от этой прямой, лежат на прямой, параллельной данной.*

Доказательство. Пусть перпендикуляры $AB$ и $CD$ к прямой $b$ равны (см. рис. 285). Прямая $a$, проходящая через точку $A$ параллельно прямой $b$, будет пересекать луч $DC$ в некоторой точке $C_1$. По теореме о расстоянии между параллельными прямыми $C_1D = AB$. Но $CD = AB$ по условию. Значит, точка $C$ совпадает с точкой $C_1$ и лежит на прямой $a$, которая параллельна прямой $b$. Утверждение доказано.

В силу того что прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых, будет перпендикулярна и к другой прямой, перпендикуляр $AB$ к прямой $b$ будет перпендикуляром и к прямой $a$ (см. рис. 285). Поэтому такой перпендикуляр называют *общим перпендикуляром* двух параллельных прямых.



## Задания к § 26

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ

**ключевые задачи**

**Задача 1.** *В четырехугольнике* $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AB = 32$ *см*, $\angle ADC = 150°$. *Найти расстояние между прямыми* $AD$ *и* $BC$.

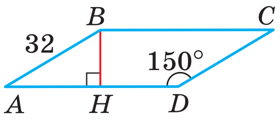



*Рис. 286*

Решение. $\angle BAD + \angle ADC = 180°$ как сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых $AB$ и $CD$ и секущей $AD$ (рис. 286). Тогда $\angle BAD = 180° - 150° = 30°$.

Расстояние между параллельными прямыми измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из любой точки одной из прямых на другую прямую. Опустим перпендикуляр $BH$ на прямую $AD$. В прямоугольном треугольнике $ABH$ катет $BH$ лежит против угла в 30°. Поэтому он равен половине гипотенузы. Значит, $BH = \frac{1}{2}AB = 16$ см.

Ответ: 16 см.

**Задача 2.** *Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых.*

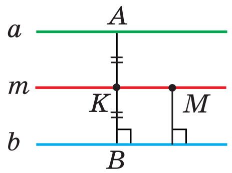



*Рис. 287*

Решение. 1) Пусть $a$ и $b$ — данные параллельные прямые (рис. 287), $AB$ — их общий перпендикуляр. Через середину $K$ отрезка $AB$ проведем прямую $m$, параллельную прямой $a$. Тогда $m \parallel b$. По теореме о расстоянии между параллельными прямыми все точки прямой $m$ равноудалены от прямых $a$ и $b$ на расстояние $\frac{1}{2}AB$.

2) Пусть некоторая точка $M$ (см. рис. 287) равноудалена от прямых $a$ и $b$, то есть расстояние от точки $M$ до прямой $b$ равно $\frac{1}{2}AB$. По следствию из теоремы о расстоянии между параллельными прямыми точки $K$ и $M$ лежат на прямой $KM$, параллельной прямой $b$. Но через точку $K$ проходит единственная прямая $m$, параллельная $b$. Значит, точка $M$ принадлежит прямой $m$.

Таким образом, все точки прямой $m$ равноудалены от прямых $a$ и $b$. И любая равноудаленная от них точка лежит на прямой $m$. Прямая $m$, проходящая через середину общего перпендикуляра прямых $a$ и $b$, — искомое геометрическое место точек.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**246.** Прямая $a$ параллельна прямой $b$, прямая $c$ параллельна прямой $b$. Расстояние между $a$ и $b$ равно 3 см, а между $b$ и $c$ равно 5 см. Чему может быть равно расстояние между прямыми $a$ и $c$? Рассмотрите все варианты.

**247.** Две параллельные прямые пересекаются секущей в точках $A$ и $B$. Прямая $AB$ составляет с одной из параллельных прямых угол 30°. Расстояние между этими параллельными прямыми равно 8,5 см. Найдите длину отрезка $AB$.

**248.** Докажите, что прямая, равноудаленная от двух данных параллельных прямых, делит пополам любой отрезок с концами на этих параллельных прямых.

**249.** Через вершину $B$ равнобедренного треугольника $ABC$ проведена прямая $b$, параллельная основанию $AC$. Найдите расстояние между прямой $b$ и прямой $AC$, если известно, что $\angle ABC = 120°$, $AB + BC = 64$ см.

**250.** Через вершину $A$ равнобедренного $\triangle ABC$ с основанием $AC$ проведена прямая $a$, параллельная боковой стороне $BC$. Найдите боковую сторону треугольника $ABC$, если расстояние между прямыми $a$ и $BC$ равно 19 см и $\angle BAC = 15°$.

**251.** В окружности с центром в точке $O$ и радиусом 8,1 см проведены диаметры $AB$ и $CD$. Угол $AOC$ равен 60°. Докажите, что прямые $AD$ и $CB$ параллельны, и найдите расстояние между ними.

**252*.** Объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 120 дм$^3$, $AD = 5$ дм, $DC = 4$ дм (рис. 288). Найдите расстояние между прямыми $DC$ и $D_1C_1$.

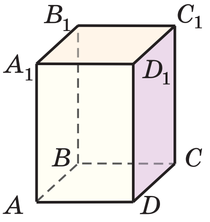



*Рис. 288*

**253*.** Докажите, что сумма расстояний от точки, взятой на основании равнобедренного треугольника, до прямых, содержащих его боковые стороны, равна высоте треугольника, проведенной к боковой стороне.

**254*.** При помощи линейки с параллельными краями разделите данный угол пополам.

**255*.** В тетради отмечены точки $A$, $B$ и $C$ (рис. 289). При помощи чертежного треугольника проведите через эти точки три попарно параллельные прямые так, чтобы расстояния от средней прямой до двух крайних были равны.

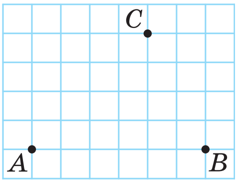


*Рис. 289*

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°.
2. Как определяется расстояние между параллельными прямыми.

**Умеем**

1. Доказывать теорему о расстоянии между параллельными прямыми.
2. Доказывать теорему о свойстве катета, лежащего против угла в 30°.

## *Геометрия 3D*

*Расстоянием между параллельными плоскостями* называется длина перпендикуляра, опущенного из точки, принадлежащей одной из плоскостей, на другую плоскость (рис. 290). В вашем классе пол и потолок — части параллельных плоскостей. Расстояние между ними равно высоте классной комнаты.

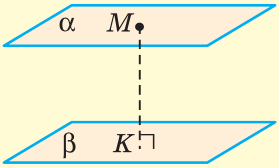
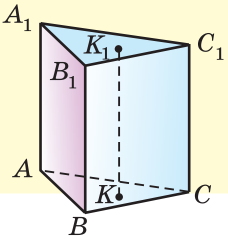


*Рис. 290*

*Высотой прямой призмы* называется расстояние между плоскостями оснований. Отрезок $KK_1$ — перпендикуляр к плоскости $ABC$, равный ее высоте. У прямой призмы боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований. Поэтому высота призмы равна длине бокового ребра, то есть $AA_1 = KK_1$ (рис. 291).




**Задача.** *Найдите высоту прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\triangle ABC$ — равносторонний с периметром 48 см, а все боковые грани призмы — квадраты (см. рис. 291).*

*Рис. 291*

## Моделирование

Ребята нашли схему примерного определения ширины реки в походных условиях (рис. 292). Однако сама инструкция оказалась оборванной.

Помогите ребятам восстановить текст инструкции. Смоделируйте математическое решение этой практической задачи. Попробуйте применить данный метод на практике, определив, например, ширину беговой дорожки или школьного стадиона.

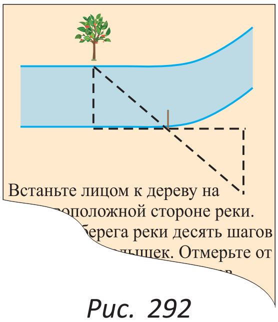
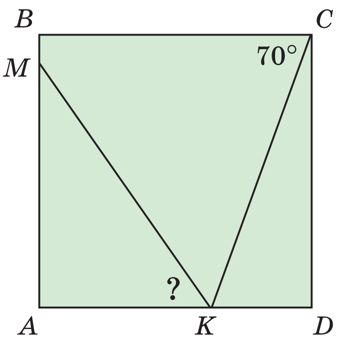



*Рис. 292*

## Реальная геометрия

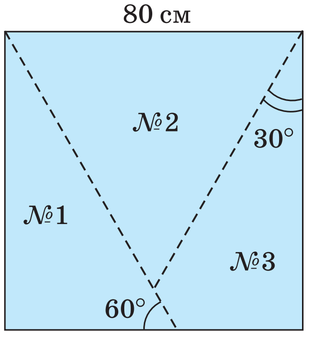
**Задача 1.** Квадратный лист картона, показанный на рисунке, разрезают по прямым $CK$ и $KM$. При этом прямая $CK$ составляет с верхней стороной квадрата угол 70°, а разрез $KM$ делит угол $AKC$ пополам.




1) Определите, под каким углом к нижней стороне квадрата следует сделать разрез $KM$.

2) Определите углы полученных треугольников.

3) Найдите углы четырехугольника $KMBC$.




**Задача 2.** Квадратный отрез материи со стороной 80 см нужно раскроить на 3 части, как показано на рисунке.

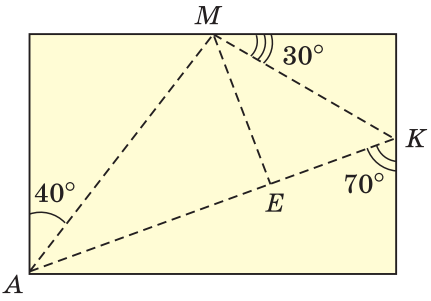
1) Составьте алгоритм выполнения задания.

2) Вырежьте из бумаги квадрат в масштабе 1 : 10 к данному отрезу материи и сделайте раскрой этого квадрата согласно условию.

3) Найдите путем расчетов и непосредственным измерением углы каждой фигуры.

4) Вычислите периметр фигуры № 2.

**Задача 3.** Из прямоугольного листа фанеры вырезали треугольник $AMK$, как показано на рисунке. Затем его разрезали по высоте $ME$. Найдите все углы треугольника $AMK$, треугольника $AME$ и треугольника $KME$.



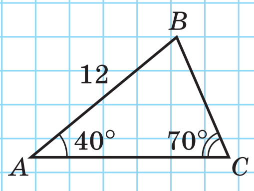

## ЗАПОМИНАЕМ

1. Сумма углов треугольника равна 180°.
2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.
3. Катет меньше гипотенузы. Перпендикуляр меньше наклонной, проведенной из той же точки к одной прямой.
4. Прямоугольные треугольники могут быть равны: 1) по двум катетам; 2) по катету и прилежащему острому углу; 3) по катету и противолежащему острому углу; 4) по гипотенузе и острому углу; 5) по катету и гипотенузе.
5. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30°.
6. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла — большая сторона.
7. В треугольнике любая сторона меньше суммы двух других его сторон (неравенство треугольника).
8. Любая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла. Если точка внутри угла равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.
9. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.
10. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (2-я замечательная точка).
11. Расстояние от любой точки одной из параллельных прямых до другой прямой есть величина постоянная.

## Проверяем себя

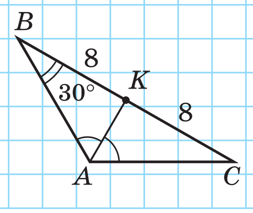
### Тест 1

Найдите сторону $AC$ треугольника $ABC$.



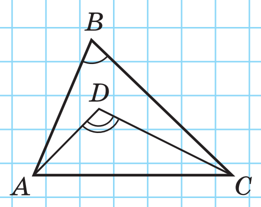

### Тест 2

Найдите расстояние от точки $B$ до прямой $AC$.




### Тест 3

Докажите, что $\angle ABC$ меньше $\angle ADC$.



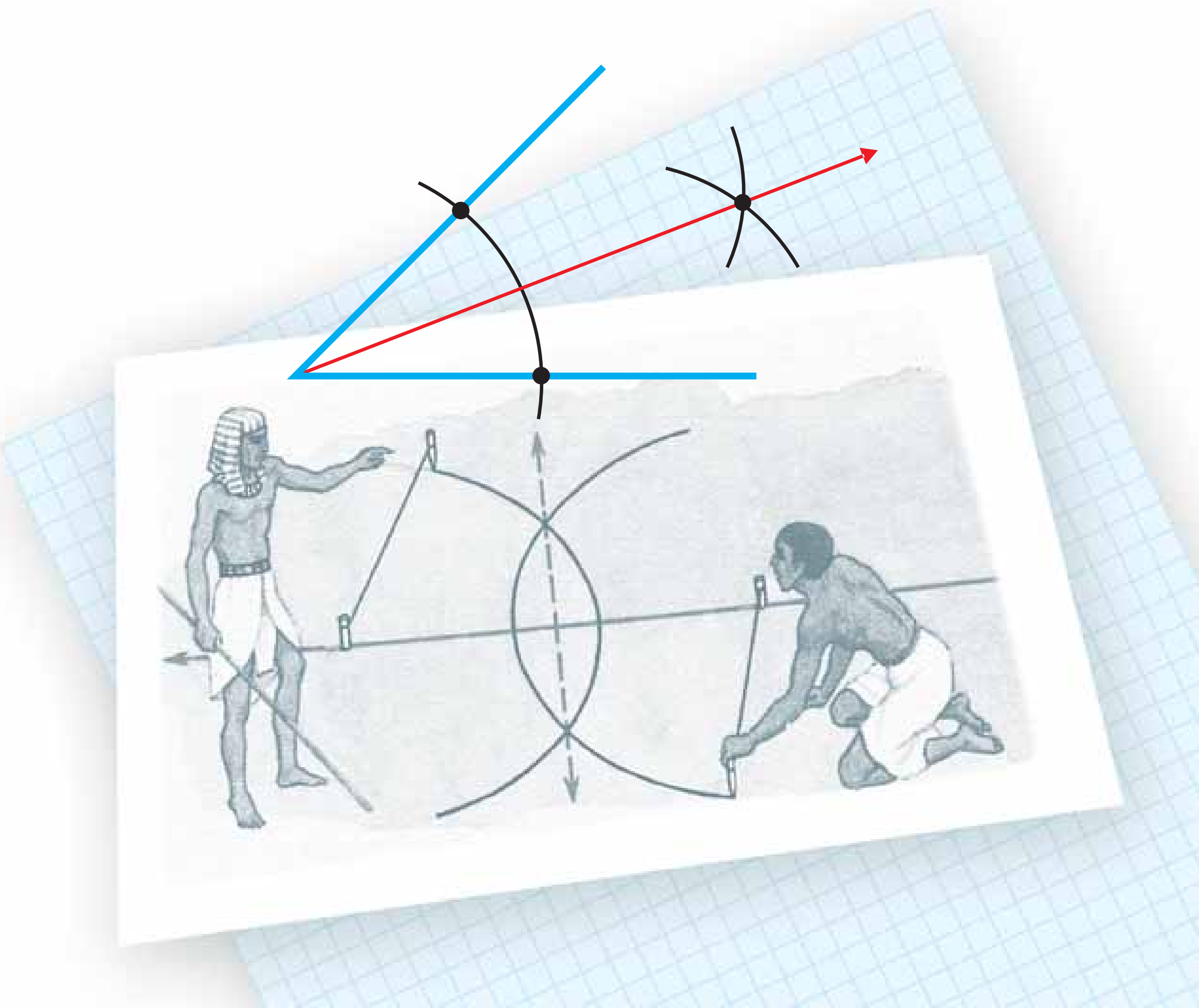

Дополнительные материалы к главе можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, курс «Математика» — «Математика. 7 класс», модуль «Сумма углов треугольника».

Глава V

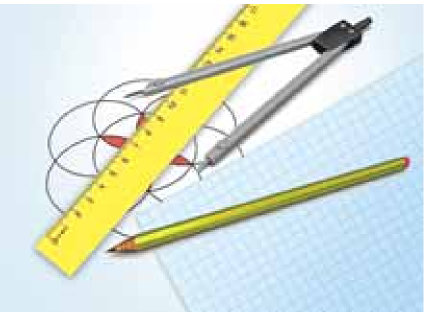
# Задачи на построение

**В этой главе вы узнаете:**

- В чем сущность задачи на построение.
- Как построить треугольник по трем сторонам.
- Как построить прямой угол без угольника.



# § 27. О задачах на построение



Ранее мы выполняли построения на плоскости при помощи линейки с делениями, чертежного треугольника, транспортира и циркуля.

Математиков всегда интересовали построения геометрических фигур, которые можно выполнить только при помощи циркуля и линейки. В геометрии специально выделяют задачи на построение, которые могут быть решены с помощью этих двух инструментов.

Например, при помощи циркуля и линейки можно построить треугольник, стороны которого равны трем данным отрезкам. Или построить угол, равный данному углу.

Рассмотрим одну из таких задач на построение. На прямой $a$ нужно найти точку, которая находится на одинаковом расстоянии от точек $A$ и $B$, лежащих по одну сторону от прямой $a$ (рис. 293, *а*).

Найти точку — это значит построить ее при помощи циркуля и линейки. Если перемещать некоторую точку по прямой $a$ (положения $K_1$, $K_2$, $K_3$), то расстояния от этой точки до точек $A$ и $B$ будут меняться. Когда эти расстояния станут равными, точка на прямой будет равноудалена от концов отрезка $AB$. Значит, она будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$. Это и есть идея построения: нужно построить серединный перпендикуляр к отрезку $AB$ и найти точку его пересечения с прямой $a$.

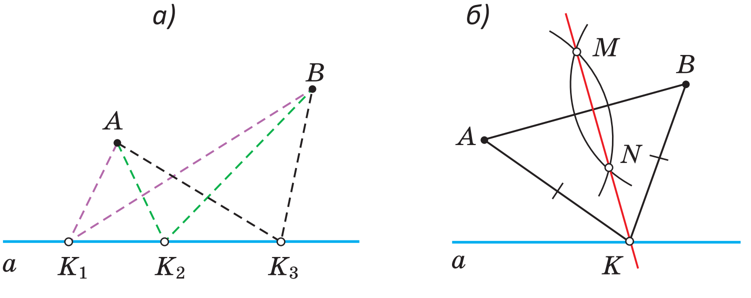



*Рис. 293*

Чтобы построить серединный перпендикуляр, нужно построить две пересекающиеся окружности равных радиусов с центрами в точках $A$ и $B$ (рис. 293, *б*). Затем провести прямую $MN$ через точки пересечения этих окружностей (ниже мы обоснуем это построение). В пересечении серединного перпендикуляра $MN$ к отрезку $AB$ и прямой $a$ получим искомую точку $K$.

Рассмотренная задача может иметь и практический смысл. Допустим, есть два населенных пункта и шоссе рядом с ними. На шоссе нужно найти место для остановки, чтобы путь для жителей обоих населенных пунктов до остановки был одинаковым. Все построения будут сделаны на карте населенного пункта.

При решении задач на построение линейка считается *односторонней* и *без делений*. При помощи такой линейки нельзя построить две параллельные прямые, проведя линии по краям линейки, нельзя измерять и откладывать отрезки, нельзя строить перпендикуляры, используя прямоугольную форму линейки. Рассмотрим, какие операции *можно* выполнять линейкой, а какие циркулем.

**Операции линейки**

При помощи *линейки* можно провести (построить):

а) произвольную прямую;

б) прямую, проходящую через две точки (рис. 294).

**Операции циркуля**

При помощи *циркуля* можно:

а) построить произвольную окружность и окружность (дугу окружности) с данным центром и радиусом, равным данному отрезку (рис. 295);

б) отложить отрезок, равный данному отрезку, на некоторой прямой.

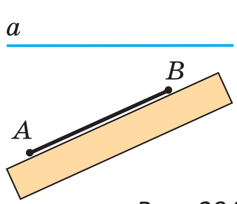


*Рис. 294*

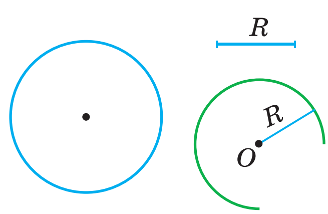
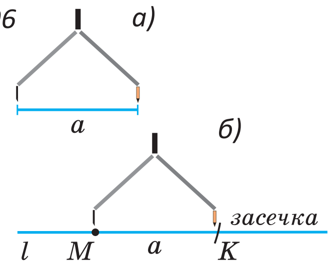


*Рис. 295*

Рис. 296



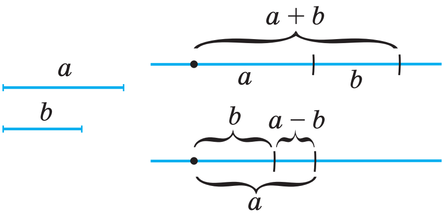




Рис. 297

**Откладывание отрезка**

Для откладывания отрезка, равного данному отрезку $a$ (рис. 296, *а*) на прямой $l$ (рис. 296, *б*), следует: 1) отметить на прямой $l$ точку $M$; 2) радиусом, равным $a$, провести дугу окружности с центром в точке $M$ (сделать засечку на прямой $l$).

В пересечении дуги и прямой $l$ получим точку $K$ и отрезок $MK$, равный $a$.

Операция откладывания отрезка на прямой позволяет построить сумму и разность двух отрезков (рис. 297): в первом случае на произвольной прямой откладывают последовательно два отрезка, во втором — на большем отрезке от любого его конца откладывают меньший отрезок.

В дальнейшем при решении задач на построение мы не будем описывать процедуру откладывания отрезка на прямой, считая ее элементарной операцией.

Перечислим 5 *основных задач на построение*, к которым сводятся другие задачи. Решая сложные задачи, будем ссылаться на эти основные, не описывая ту часть решения, которая связана с одной из основных задач.

**Задача I.** Построение треугольника по трем сторонам.

**Задача II.** Построение угла, равного данному.

**Задача III.** Построение биссектрисы угла.

**Задача IV.** Построение середины отрезка.

**Задача V.** Построение прямой, перпендикулярной данной.

В некотором смысле «линейка» и «циркуль» — это два идеальных робота, которые могут выполнять определенный набор операций. И наша задача — составить алгоритм из последовательности таких операций — команд для этих роботов, который приведет к построению необходимой фигуры. Фак-

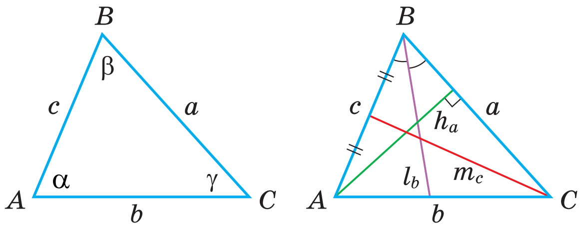



*Рис. 298*

тически нужно написать программу для «циркуля» и «линейки».

*Замечание.* В треугольнике $ABC$ стороны, противолежащие углам $A$, $B$ и $C$, будем соответственно обозначать $a$, $b$ и $c$, а сами эти углы — $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ (рис. 298). Медианы, проведенные к сторонам $a$, $b$ и $c$, — $m_a$, $m_b$ и $m_c$, высоты — $h_a$, $h_b$ и $h_c$, биссектрисы — $l_a$, $l_b$ и $l_c$.

## Задания к § 27

Перенесите в тетрадь точки $A$, $B$, $C$, $M$, $N$, $K$ и выполните задания 1—5 (рис. 299).

**1.** При помощи линейки постройте прямую $AN$, луч $BA$, отрезок $CM$.

**2.** На прямой $AN$ при помощи циркуля отложите отрезок $AQ$, равный отрезку $CM$; на луче $BA$ от его вершины отложите отрезок $BE$, равный утроенному отрезку $BC$.

**3.** При помощи циркуля постройте окружность с центром в точке $M$ и радиусом, равным отрезку $BC$.

**4.** Найдите точки $L$ и $T$ пересечения построенной окружности и прямой $AN$.

**5.** Найдите точки $D$ и $F$ пересечения построенной окружности с окружностью с центром в точке $K$ и радиусом, равным отрезку $BC$; постройте точку $G$ пересечения хорды $DF$ и отрезка $MK$.

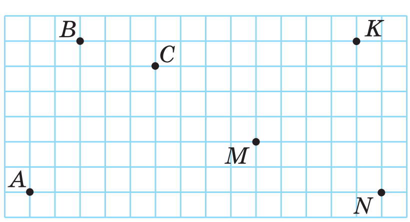



*Рис. 299*

# § 28. Построение треугольника по трем сторонам. Построение угла, равного данному

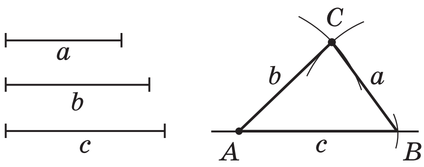


*Рис. 300*

**Задача I.** *Построить треугольник со сторонами $a$, $b$ и $c$.*

Решение. Пусть даны отрезки $a$, $b$ и $c$. На произвольной прямой откладываем отрезок $AB = c$ (рис. 300). Строим окружность с центром в точке $A$ радиусом $b$. Строим окружность с центром в точке $B$ радиусом $a$. Находим точку $C$ пересечения этих окружностей. Проведем отрезки $AC$ и $BC$. Треугольник $ABC$ — искомый, так как у него $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ по построению.

Задача имеет решение, если для данных отрезков $a$, $b$ и $c$ выполняется неравенство треугольника: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$. Если решение существует, то оно единственное, так как все построенные треугольники будут равны по 3-му признаку равенства треугольников.

**Следствие.**

*Если для чисел $a$, $b$ и $c$ выполняется неравенство треугольника, то существует, и причем единственный, треугольник со сторонами, равными $a$, $b$ и $c$.*

*Замечание.* При решении задач на построение под числом решений понимается число фигур разной формы, удовлетворяющих условию. В данном случае решение одно.

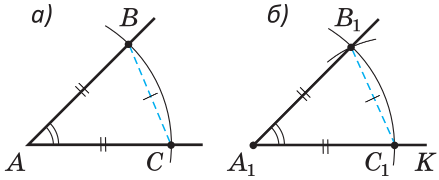


*Рис. 301*

**Задача II.** *Построить угол, равный данному углу.*

Решение. Пусть дан угол $A$ (рис. 301, *а*). Нужно построить угол $A_1$, равный углу $A$. Идея решения состоит в том, чтобы построить некоторый треугольник $ABC$ с углом $A$ и равный ему треугольник $A_1B_1C_1$.

Строим произвольный луч $A_1K$ (рис. 301, *б*). Произвольным, но одним и тем же радиусом строим дуги с центрами в точках $A$ и $A_1$. Получаем $AB = AC = A_1C_1$. Строим дугу окружности с центром в точке $C_1$ радиусом, равным $CB$, до пересечения ее с уже построенной дугой в точке $B_1$. Строим луч $A_1B_1$. Угол $A_1$ — искомый. Действительно, так как $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ по построению), то $\angle A_1 = \angle A$ как соответствующие в двух равных треугольниках.

*Замечания.* Построение угла, равного данному, дает возможность строить сумму и разность двух углов.

## РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
**ключевые задачи**

**Задача 1.** *Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.*

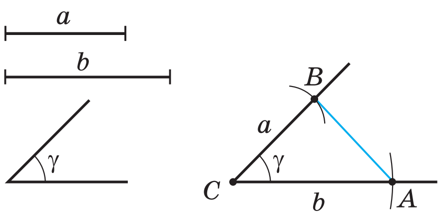



*Рис. 302*

Решение. Пусть даны отрезки $a$ и $b$ и угол $\gamma$ (рис. 302). Нужно построить треугольник со сторонами $a$ и $b$ и углом $\gamma$ между ними. Вначале строим угол $C$, равный данному углу $\gamma$ (основная задача). На сторонах угла $C$ откладываем отрезки $CB = a$ и $CA = b$ и проводим отрезок $AB$. Треугольник $ABC$ — искомый, так как удовлетворяет условию задачи: $CB = a$, $CA = b$, $\angle C = \gamma$ по построению.
Заметим, что решение существует, если $\gamma < 180°$, и оно единственное, так как все построенные треугольники будут равны по 1-му признаку равенства треугольников.

**Задача 2.** *Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.*

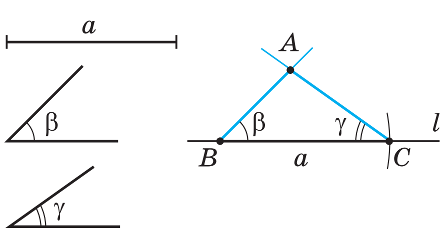



*Рис. 303*

Решение. Пусть дана сторона $a$ и углы $\beta$ и $\gamma$ (рис. 303). Нужно построить треугольник со стороной $a$ и прилежащими к ней углами $\beta$ и $\gamma$.

На произвольной прямой $l$ откладываем отрезок $BC = a$.

От лучей $BC$ и $CB$ в одну полуплоскость откладываем углы, равные углу $\beta$ и углу $\gamma$ (основная задача). Отмечаем точку $A$, в которой пересекаются стороны углов $B$ и $C$. Треугольник $ABC$ — искомый.

Решение существует, если $\beta+\gamma<180°$, и оно единственное, так как все построенные треугольники будут равны по 2-му признаку равенства треугольников.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**256.** Постройте в тетради три отрезка, равные 6, 8 и 10 клеточкам. Постройте треугольник со сторонами, равными построенным отрезкам.

**257.** Изобразите в тетради произвольный треугольник $ABC$ и прямую $l$, не пересекающую треугольник. Постройте треугольник $MNK$, равный треугольнику $ABC$, у которого сторона $MK$ лежит на прямой $l$ и $NK=BC$, а $MN=AB$.

**258.** Изобразите в тетради произвольный тупой угол. Постройте угол, равный данному углу.

**259.** Изобразите в тетради угол $A$ и луч $l$ с началом в точке $K$ (рис. 304). Постройте угол, равный углу $A$, с вершиной в точке $K$, расположенный в нижней полуплоскости относительно прямой $l$.

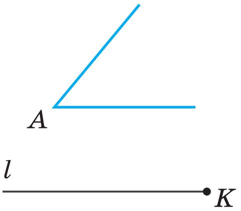


*Рис. 304*

**260.** Изобразите два неравных угла. Постройте угол, равный: а) сумме данных углов; б) разности данных углов.

**261.** Постройте треугольник по двум сторонам $a$ и $b$ и медиане $m_b$, проведенной к стороне $b$.

**262*.** Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

# § 29. Построение биссектрисы угла. Построение середины отрезка

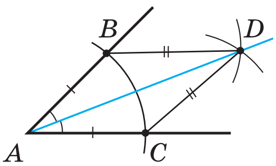


*Рис. 305*

**Задача III.** *Построить биссектрису данного угла.*

Решение. Пусть дан угол $A$ (рис. 305). Нужно построить его биссектрису. Произвольным радиусом строим дугу окружности с центром в точке $A$, которая пересекает стороны угла $A$ в точках $B$ и $C$. Далее одинаковым радиусом строим две дуги с центрами в точках $B$ и $C$ до их пересечения в точке $D$. Строим луч $AD$, который является искомой биссектрисой. Доказательство следует из того, что $\triangle ABD = \triangle ACD$ по трем сторонам ($AB = AC$, $BD = CD$ как радиусы, сторона $AD$ — общая), откуда $\angle BAD = \angle CAD$.

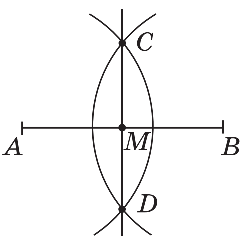


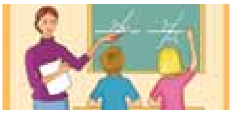
*Рис. 306*

**Задача IV.** *Построить середину отрезка (разделить данный отрезок пополам).*

Решение. Пусть $AB$ — данный отрезок. Произвольным, но одним и тем же радиусом (бóльшим половины отрезка $AB$) проводим две дуги с центрами в точках $A$ и $B$ до их пересечения в точках $C$ и $D$ (рис. 306).

Через точки $C$ и $D$ проводим прямую. В пересечении прямых $CD$ и $AB$ получаем точку $M$ — середину отрезка $AB$. Докажем это. Так как точки $C$ и $D$ равноудалены от концов отрезка $AB$ ($CA = CB = DA = DB$ как радиусы), то они лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Поскольку две точки задают единственную прямую, то $CD$ — серединный перпендикуляр к отрезку $AB$. Следовательно, $AM = MB$.

*Замечание.* Указанный способ построения середины отрезка также является и способом построения серединного перпендикуляра к отрезку.



**РЕШАЕМ ВМЕСТЕ**
**ключевые задачи**

**Задача 1.** *Построить треугольник по стороне $b$, прилежащему углу $\alpha$ и биссектрисе $l_a$.*

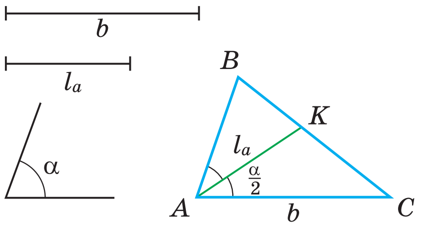



Рис. 307

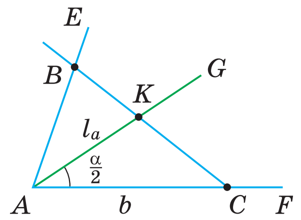



Рис. 308

Решение. Предположим, что задача решена, и сделаем чертеж искомого треугольника $ABC$ (рис. 307). Пусть $AC = b$, $\angle A = \alpha$, биссектриса $AK = l_a$. Так как $AK$ — биссектриса, то $\angle KAC = \frac{\alpha}{2}$. Треугольник $AKC$ можно построить по двум сторонам и углу между ними: $AC = b$, $AK = l_a$, $\angle KAC = \frac{\alpha}{2}$. Далее треугольник $AKC$ легко достроить до искомого треугольника $ABC$.

Опишем построение (рис. 308).

1) Строим $\angle EAF = \alpha$ (основная задача).

2) Строим биссектрису $AG$ угла $EAF$ (основная задача). Получаем $\angle GAF = \frac{\alpha}{2}$.

3) Строим треугольник $AKC$ по двум сторонам и углу между ними: на луче $AF$ откладываем отрезок $AC = b$, на луче $AG$ — отрезок $AK = l_a$.

4) Находим точку $B$ пересечения луча $CK$ и луча $AE$. Треугольник $ABC$ — искомый.

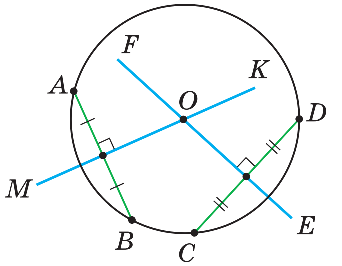



Рис. 309

**Задача 2.** *Построить центр данной окружности.*

Решение. Мы знаем, что серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности. Серединные перпендикуляры к двум хордам окружности будут пересекаться в ее центре. Отсюда построение.

Строим хорду $AB$ (рис. 309) и к ней серединный перпендикуляр $MK$ (основная задача). Строим хорду $CD$ (не параллельную $AB$) и к ней серединный перпендикуляр $EF$. Точка $O$ пересечения прямых $MK$ и $EF$ — центр окружности.

*Замечание.* Вторым способом решения будет построение одного серединного перпендикуляра $MK$ к хорде $AB$, нахождение точек $T$ и $P$ пересечения $MK$ с окружностью и построение середины $O$ диаметра $TP$.

**РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО**

**263.** Разделите данный отрезок на четыре равные части.

**264.** Постройте угол, равный $\frac{3}{4}$ данного угла.

**265.** Изобразите остроугольный треугольник $ABC$. Для него постройте: а) биссектрису $AK$; б) медиану $BM$.

**266.** Постройте точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника и окружность, проходящую через все вершины треугольника.

**267.** В одной полуплоскости относительно прямой $m$ лежат две точки $A$ и $B$. На прямой $m$ постройте точку $M$, равноудаленную от точек $A$ и $B$.

**268*.** Дан неравнобедренный треугольник $ABC$. На биссектрисе угла $B$ найдите точку, которая находится на равном расстоянии от вершин $A$ и $C$.

## § 30. Построение прямой, перпендикулярной данной

**Задача V.** *Построить прямую, перпендикулярную прямой $a$ и проходящую через данную точку $A$.*

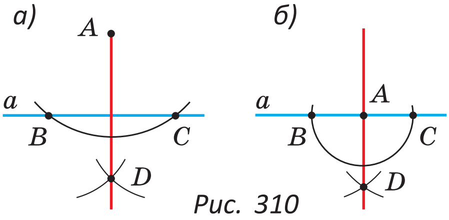



*Рис. 310*

Решение. Алгоритм построения одинаков для случая, когда точка $A$ не принадлежит прямой $a$ (рис. 310, *а*) и когда точка $A$ принадлежит прямой $a$ (рис. 310, *б*).

Построение.

Проводим дугу с центром в точке $A$, которая пересекает прямую $a$ в точках $B$ и $C$. Из точек $B$ и $C$ как из центров одним и тем же радиусом проводим дуги до пересечения их в точке $D$. Строим прямую $AD$. Получаем $AD \perp a$.

Доказательство.

Так как точки $A$ и $D$ равноудалены от концов отрезка $BC$ ($AB = AC$, $BD = CD$ как радиусы), то $AD$ — серединный перпендикуляр к отрезку $BC$. Следовательно, $AD \perp a$.

## Этапы решения задачи на построение

При решении задачи на построение выделяют 4 этапа.

1. Анализ.

На этом этапе предполагают, что задача решена, делают чертеж с изображением искомой фигуры и указывают *идею решения* задачи.

2. Построение.

На этом этапе дают *описание последовательности шагов*, приводящих к построению искомой фигуры, то есть алгоритм построения. Иногда на этом этапе проводят и сами операции построения на произвольно взятых отрезках, углах и других фигурах. В сложных задачах обычно указывают лишь шаги построения, ссылаясь на основные и ключевые задачи.

3. Доказательство.

На этом этапе доказывают, что *построенная фигура удовлетворяет требованию задачи*. Иногда это следует непосредственно из построения.

4. Исследование.

На данном этапе определяют, при какой величине заданных в условии отрезков и углов существует решение и число решений.

При записи решения задачи на построение этапы анализа и исследования в школе *необязательны*, если в условии задачи нет специальных указаний.

## РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
### ключевые задачи

**Задача 1.** *Построить прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу.*

Решение. Пусть дан катет $a$ и прилежащий к нему острый угол $\beta$. Нужно построить прямоугольный треугольник с катетом $a$ и углом $\beta$ (рис. 311).

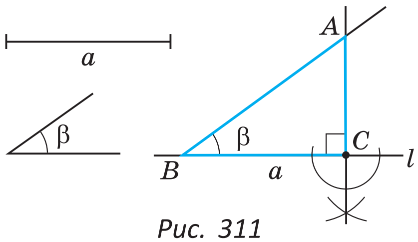



*Рис. 311*

П о с т р о е н и е. 1) Строим прямой угол. Для этого проводим произвольную прямую $l$ и строим перпендикулярную ей прямую, проходящую через произвольно взятую на прямой $l$ точку $C$ (основная задача). Получаем прямой угол $C$.

2) На одной стороне прямого угла $C$ от его вершины откладываем отрезок $CB = a$.

3) Строим $\angle B = \beta$ (основная задача).

4) В пересечении стороны угла $B$ со стороной прямого угла получим точку $A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Треугольник $ABC$ — искомый, так как по построению $\angle C = 90°$, $BC = a$ — катет, $\angle B = \beta$ — прилежащий острый угол.

*Замечание.* Мы не описываем построение прямой, перпендикулярной данной, и построение угла, равного данному, так как это основные задачи. На рисунке 311 построение прямого угла $C$ показано для наглядности.

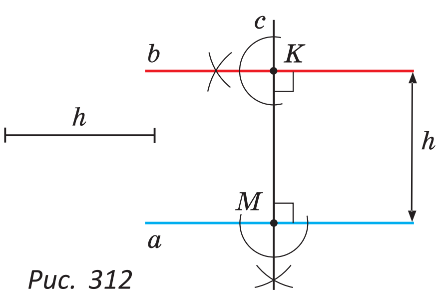



*Рис. 312*

**Задача 2.** *Построить прямую, параллельную данной прямой, если расстояние между этими прямыми равно заданному отрезку.*

Р е ш е н и е. Пусть дана прямая $a$ и отрезок $h$, равный расстоянию между параллельными прямыми $a$ и $b$ (рис. 312). Нужно построить прямую $b$, параллельную прямой $a$ и находящуюся от прямой $a$ на расстоянии $h$. Воспользуемся теоремой о том, что на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.

П о с т р о е н и е.

1) Отмечаем на прямой $a$ точку $M$ и строим прямую $c$, перпендикулярную прямой $a$ и проходящую через точку $M$ (основная задача).

2) Откладываем на прямой $c$ перпендикуляр $MK = h$.

3) Строим прямую $b$, перпендикулярную прямой $c$ и проходящую через точку $K$ (основная задача). Получаем $b \parallel a$.

Доказательство. Так как $a \perp c$ и $b \perp c$ и на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой, то $a \parallel b$. Расстояние между параллельными прямыми равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки одной из прямых на другую прямую: $KM \perp a$, $KM = h$.

**Задача 3.** *Построить треугольник по основанию $a$, высоте $h_a$ и медиане $m_a$, проведенным к этому основанию.*

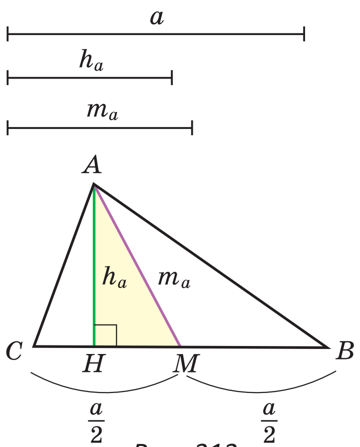


Рис. 313

Решение.

Анализ. Пусть у треугольника $ABC$ $BC = a$, высота $AH = h_a$ и медиана $AM = m_a$ (рис. 313). Заметим, что треугольник $AHM$ может быть построен по катету и гипотенузе, а затем достроен до искомого треугольника $ABC$ путем откладывания от точки $M$ влево и вправо отрезков $MC = MB = \frac{a}{2}$.

Построение.

1) Строим прямой угол $H$ (рис. 314). На одной его стороне откладываем отрезок $AH = h_a$, из точки $A$ как из центра делаем засечку на второй стороне угла радиусом $m_a$ — получаем точку $M$.

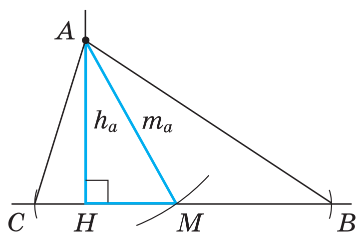


Рис. 314

2) Делим отрезок $a$ пополам (основная задача) и на прямой $HM$ откладываем по разные стороны от точки $M$ отрезки $MB = \frac{a}{2}$ и $MC = \frac{a}{2}$. Проводим отрезки $CA$ и $BA$.

Доказательство. $\triangle ABC$ — искомый, так как у него высота $AH = h_a$, медиана $AM = m_a$, сторона $BC = a$ по построению.

Исследование*. Так как катет меньше гипотенузы, то высота $h_a$ должна быть меньше или равна медиане $m_a$. Поэтому решение существует, если $h_a \leqslant m_a$, и оно единственное. Если $h_a = m_a$, получим равнобедренный треугольник.

## РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**269.** Изобразите остроугольный треугольник $ABC$. Постройте: а) высоту $AH$; б) точку пересечения высот треугольника $ABC$.

**270.** Изобразите угол $\alpha$. Постройте угол $\beta$, если известно, что $\alpha + \beta = 90°$.

**271.** Постройте прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и противолежащему острому углу; в) по гипотенузе и острому углу.

**272.** Постройте равнобедренный треугольник по высоте и основанию.

**273.** Постройте прямоугольник по двум сторонам $a$ и $b$.

**274.** Постройте треугольник $ABC$ по стороне $b$, высоте $h_a$ и медиане $m_a$, проведенным к стороне $a$.

**275*.** Постройте основание $H$ высоты $CH$ треугольника $ABC$, у которого вершина $C$ недоступна (рис. 315).

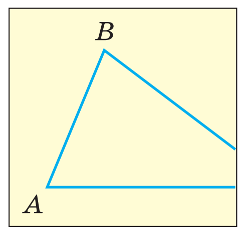



*Рис. 315*

## § 31. Геометрическое место точек

Определение. **Геометрическим местом точек (ГМТ)** называется множество всех точек, обладающих общим свойством.

**Примеры геометрических мест точек на плоскости**

1. *Окружность* — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки.

2. *Серединный перпендикуляр* — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка.

3. *Биссектриса* — геометрическое место точек внутри угла, равноудаленных от сторон угла.

4. Геометрическое место точек, находящихся на заданном расстоянии $h$ от данной прямой $a$, — две прямые $m$ и $n$, параллельные данной, находящиеся в разных полуплоскостях от этой прямой на заданном расстоянии от нее (рис. 316).

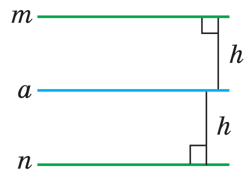


*Рис. 316*

5. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых $a$ и $b$, есть параллельная им прямая $n$, проходящая через середину $M$ их общего перпендикуляра $AB$ (рис. 317).

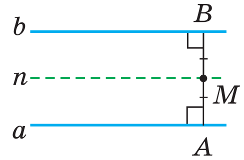


*Рис. 317*

В пространстве геометрическим местом точек, равноудаленных от данной точки, является *сфера*.

## Метод геометрических мест точек

Одним из методов решения задач на построение является *метод пересечения двух геометрических мест точек*. Суть его состоит в следующем. Пусть искомая точка удовлетворяет, например, некоторым двум условиям: геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, — это некоторая фигура $F_1$ (окружность, биссектриса угла, серединный перпендикуляр и т. д.), а геометрическое место точек, удовлетворяющих другому условию, — это фигура $F_2$. Искомая точка, принадлежащая и фигуре $F_1$, и фигуре $F_2$, является точкой их пересечения. В частности, методом пересечения двух геометрических мест точек решена основная задача о построении треугольника по трем сторонам.

### РЕШАЕМ ВМЕСТЕ
**ключевые задачи**

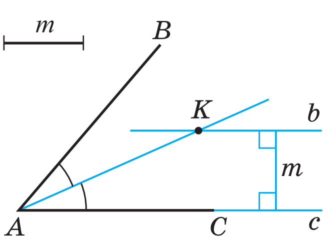


*Рис. 318*

**Задача 1.** *Построить внутри данного угла точку, которая равноудалена от сторон угла на данное расстояние m.*

Решение.

Анализ. Пусть дан угол $BAC$ и отрезок длиной $m$ (рис. 318). Все точки, равноудаленные от сторон угла, лежат на биссектрисе угла. Поэтому искомая точка лежит на биссектрисе угла. С другой стороны, все точки, удаленные от стороны угла на расстояние $m$, лежат на двух прямых, параллельных стороне угла и находящихся от нее на расстоянии $m$. Искомая точка будет находиться на пересечении указанных двух геометрических мест точек.

Построение.

1) Строим прямую $b$, параллельную прямой $AC$, с их общим перпендикуляром, равным $m$ (ключевая задача **2** § 30).

2) Строим биссектрису угла $BAC$ (основная задача).

3) В пересечении биссектрисы и прямой $b$ получаем искомую точку $K$.

Доказательство. Расстояние между параллельными прямыми $b$ и $AC$ равно $m$. Значит, и расстояние от точки $K$ до стороны $AC$ угла $BAC$ равно $m$. Все точки биссектрисы равноудалены от сторон угла, в том числе и точка $K$. Точка $K$ удовлетворяет требованию задачи.

**Задача 2.** *Построить треугольник по двум сторонам $a$ и $b$ и высоте $h_c$, опущенной на сторону $c$.*

Решение. Заметим, что в общем случае существует два треугольника со сторонами $a$, $b$ и высотой $h_c$ (рис. 319, *а*, *б*).

Построение (рис. 320).

1) Строим две параллельные прямые $m$ и $n$ с расстоянием $h$ между ними (ключевая задача **2** § 30).

2) Строим дугу с центром в точке $C$ и радиусом $a$, которая пересекает прямую $m$ в точках $B$ и $B_1$.

3) Строим дугу с центром в точке $C$ радиусом $b$, которая пересечет прямую $m$ в точке $A$. Треугольники $ABC$ и $AB_1C$ — искомые.

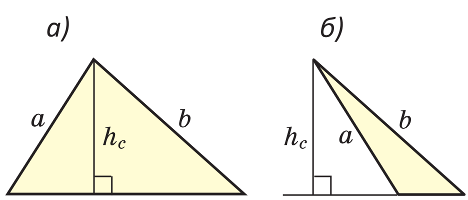



Рис. 319

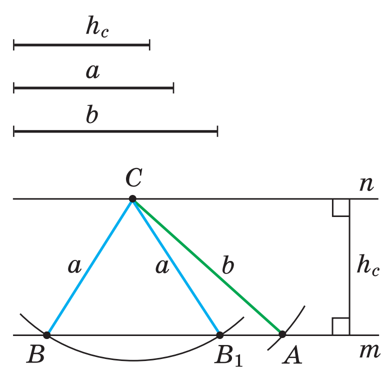



Рис. 320

Доказательство. Следует из построения и теоремы о расстоянии между параллельными прямыми.

Исследование. Так как перпендикуляр меньше наклонной, проведенной из той же точки к одной прямой, то задача может иметь решение, только если $h \leqslant a$ и $h \leqslant b$. Если $h < a$, $h < b$ и $a \neq b$, то задача имеет два решения. Если $a = h$ и $a < b$, то треугольник прямоугольный, и задача имеет одно решение. Если $h < a$ и $a = b$, то задача имеет одно решение — равнобедренный треугольник. Если $h > a$ или $h > b$, задача не имеет решения.

## Задания к § 31

### РЕШАЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО

**276.** На плоскости даны точки $A$ и $B$. Найдите геометрическое место точек $M$ плоскости, для которых: а) отрезок $AB$ является основанием равнобедренного треугольника $AMB$; б) отрезок $AB$ является боковой стороной равнобедренного треугольника $AMB$.

**277.** На плоскости даны точки $A$ и $B$. Найдите геометрическое место точек $M$ плоскости, для которых: а) $AM = MB$; б) $AM < BM$.

**278.** Даны две пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от этих прямых.

**279.** Найдите геометрическое место центров окружностей, каждая из которых проходит через две данные точки.

**280.** Постройте треугольник $ABC$: а) по стороне $a$, высоте $h_a$ и углу $\beta$; б) по стороне $a$, высоте $h_a$ и стороне $b$.

**281*.** Дан отрезок $AB$. Найдите геометрическое место вершин прямоугольных треугольников с гипотенузой $AB$.

**282*.** Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе $c$ и высоте $h_c$.

## ПОДВОДИМ ИТОГИ

**Знаем**

1. Какие операции при решении задач на построение можно выполнять циркулем, а какие — линейкой.
2. Основные задачи на построение.
3. Этапы решения задачи на построение.

**Умеем**

1. Решать основные задачи на построение.
2. Строить треугольник: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне и двум прилежащим к ней углам; в) по трем сторонам.
3. Строить прямую, параллельную данной и проходящую через данную точку.

### *Реальная геометрия*

На практике при отсутствии циркуля окружность строят при помощи куска веревки. Закрепив один его конец и натянув веревку, другим концом прочерчивают окружность.

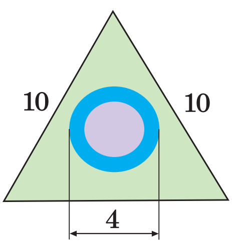
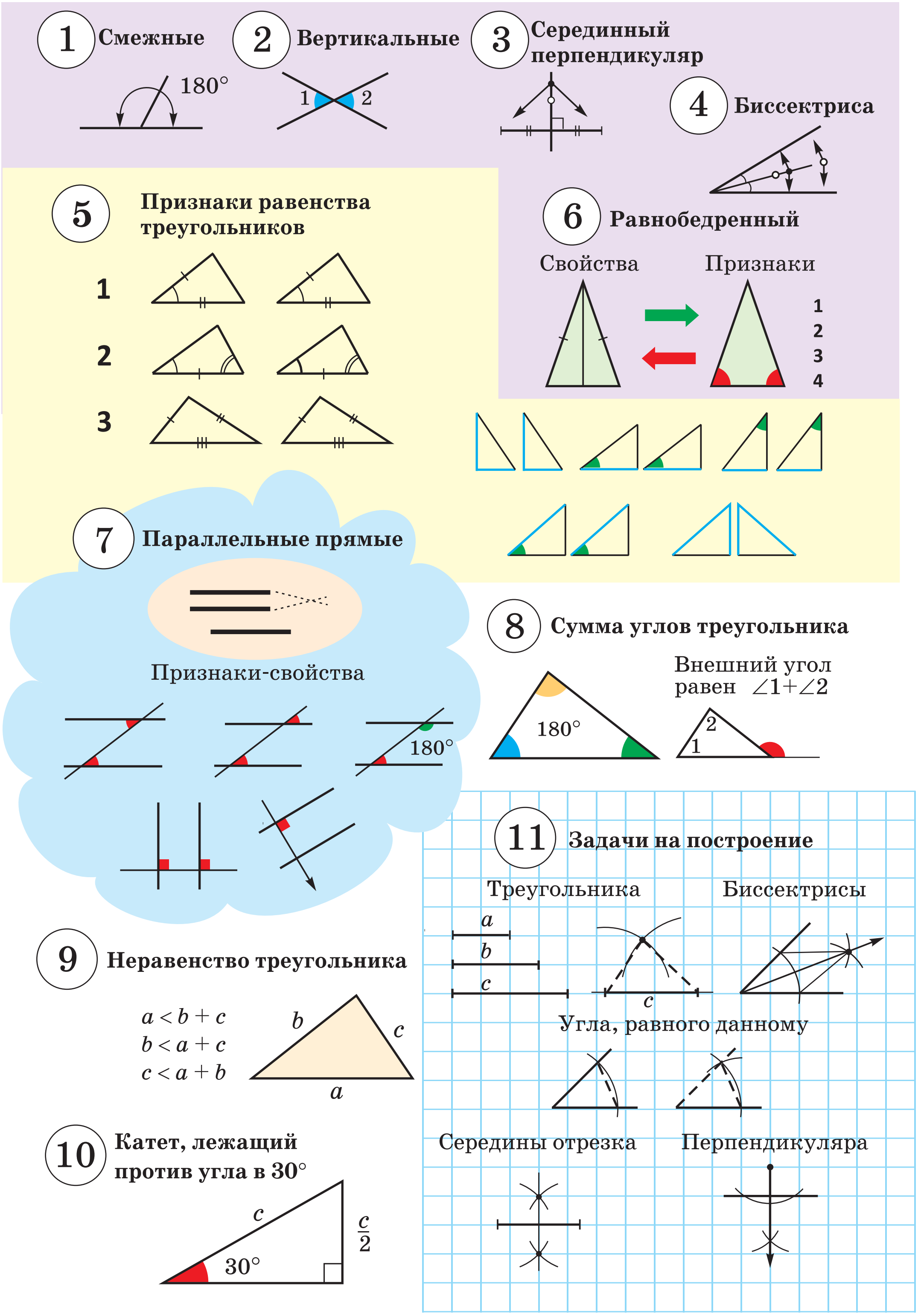



*Рис. 321*

**Задача.** *Необходимо разбить клумбу в форме равностороннего треугольника со стороной* 10 *м, в центре которой будет расположена круглая клумба диаметром* 4 *м (рис.* 321*). У вас есть веревка длиной* 15 *м, рейка длиной* 1 *м и несколько колышков.*

Составьте алгоритм решения этой практической задачи, сделайте обоснование. При этом используйте тот факт, что центр равностороннего треугольника находится в точке пересечения его медиан (высот, биссектрис).

Дополнительные материалы к главе можно найти на сайте: http://e-vedy.adu.by, курс «Математика» — «Математика. 7 класс», модуль «Задачи на построение».


1 Смежные
180°
2 Вертикальные
1 2
3 Серединный перпендикуляр
4 Биссектриса
5 Признаки равенства треугольников
1
2
3
6 Равнобедренный
Свойства
Признаки
1
2
3
4
7 Параллельные прямые
Признаки-свойства
180°
8 Сумма углов треугольника
180°
Внешний угол равен ∠1+∠2
2
1
11 Задачи на построение
Треугольника
Биссектрисы
a
b
c
c
Угла, равного данному
Середины отрезка
Перпендикуляра
9 Неравенство треугольника
a < b + c
b < a + c
c < a + b
b
c
a
10 Катет, лежащий против угла в 30°
c
c/2
30°

# База знаний по геометрии
# 7 класс

## Знать и уметь доказывать

**1.** Сумма смежных углов равна 180°.

**2.** Вертикальные углы равны.

**3.** Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

**4.** Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла.

**5.** Треугольники равны: 1) по двум сторонам и углу между ними; 2) по стороне и двум прилежащим к ней углам; 3) по трем сторонам.

Прямоугольные треугольники равны: 1) по двум катетам; 2) по катету и прилежащему острому углу; 3) по катету и противолежащему острому углу; 4) по гипотенузе и острому углу; 5) по катету и гипотенузе.

**6.** В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, а биссектриса, проведенная из вершины к основанию, является его высотой и медианой. Если у треугольника два угла равны, то он равнобедренный.

**7.** Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой. Если накрест лежащие углы равны, или соответственные углы равны, или сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны, и обратно.

Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой. Прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, перпендикулярна и другой прямой.

**8.** Сумма углов треугольника равна 180°. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

**9.** Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

**10.** Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

## Знать и применять

**1.** Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

**2.** Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Серединный перпендикуляр — геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка.

**3.** Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла. Если точка внутри угла равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе угла. Биссектриса — геометрическое место точек внутри угла, равноудаленных от сторон угла.

**4.** Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

**5.** В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла — большая сторона.

**6.** Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является центром описанной около треугольника окружности.

**7.** Если у треугольника высота является биссектрисой, или высота является медианой, или медиана является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

**8.** Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

**9.** Катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы. Для наклонных и перпендикуляра, проведенных из одной точки к одной прямой, справедливо: перпендикуляр и проекция наклонной на прямую меньше наклонной; большей проекции соответствует бóльшая наклонная, равным проекциям — равные наклонные.

**10.** В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

**11.** Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

**12.** Сумма углов четырехугольника равна $360^\circ$.

**13.** Основные задачи на построение: 1) построение треугольника по трем сторонам; 2) построение биссектрисы угла; 3) построение угла, равного данному; 4) построение середины отрезка; 5) построение прямой, перпендикулярной данной.

# ОТВЕТЫ

## Глава 1

**2.** $A$. **3.** а) 30 см. б) 21 дм. **4.** 90 см. **5.** а) Нет; б) да. **8.** 96 см. **9.** а) 48 см; б) 144 см. **10*.** а) 22 см; б) $\frac{1}{2}(a+b)$. **12*.** Прямая $EG$ пересекает $AM$ и $AD$. **15.** 70 см. **16.** 14 см. **17.** 24 см. **18*.** 49 полных оборотов. **19*.** 3 см. **21.** а) 4 острых; б) 3 тупых. **22.** 51°. **23.** 30°. **25.** 50°. **26.** 33°. **27.** 66°. **28*.** 115°. **29*.** а) 100°; б) $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. **30.** а) 140°; б) 105°; в) 39°40′. **31.** 125°. **32.** 75°. **33.** 130°. **34.** 120°. **35.** а) 20°, 160°, 160°; б) 110°, 70°, 70°; в) 90°, 90°, 90°. **36.** $\angle 1 = \angle 4 = 99°$, $\angle 2 = 45°$, $\angle 3 = 36°$. **37.** $\angle 1 = \angle 3 = 125°$, $\angle 2 = \angle 4 = 55°$. **38.** 243°. **39.** 60°. Учтите, что $3\beta + 3\gamma = 3 \cdot 180°$ и $\alpha = \gamma$. **40.** 60°. **41.** $C$. **42*.** 180°. **43*.** 108°, 72°. **44*.** 15°, 15°, 30°, 30°, 45°, 45°, 90°, 90°. **45.** а) 42°; б) 138°. **46.** 65°. **47.** 4. **48.** 80°.

## Глава 2

**51.** $MN = 6$ см, $NK = 7$ см, $MK = 5$ см. **52.** $\angle K = 30°$, $\angle E = 90°$, $\angle D = 60°$. **53.** Все стороны по 12 дм. **54.** а) 32 см; б) 58 см; в) 30 см; г) 46 см. **55.** 8 см. **56.** 20 см. **57.** 22 см, 24 см, 44 см. **58.** 4 : 5. **59.** 8 м, 12 м, 16 м. **60.** 144 см. **62*.** $P_1 = ka + kb + kc = k(a+b+c)$. **65.** 36 дм. **67.** 42 см. **68.** 6 см, 5 см. **75.** 21 см. **76.** 30 см. **79.** 56 см. **81*.** 6 см. **84.** 20 см. **85.** 4 м. **86.** 45 см. **90.** 18 см. **91.** 64 см. **95*.** 26 см. **98*.** 5 м; 20 м. **100.** г) 61°. **101.** 14,4 см. **102.** 42 см. **104.** 26 см. **106*.** 20 см. **107*.** 8 см. **111.** 84°. **113.** 17 дм. **119.** 7,5 м. **120.** 42°. **121.** 12 см. **122.** 56 см.

## Глава 3

**129.** $c \parallel e$ (рис. 175). **134.** Нет. **139.** $a \parallel c$, $b \parallel d$. **142.** $c \parallel d$, $c \parallel e$, $d \parallel e$. **144*.** 18. **145.** а) 125°; б) 118°; в) 38°; г) 97°. **146.** 235°. **147.** 120°. **148.** 50 см. **149.** 4 см. **150.** 108°. **151.** 70°. **154.** а) 82°; б) 142°; в) 56°; г) 84°. **155.** 72°. **158.** 24 см. **159*.** 8 см. **160*.** Постройте прямую, параллельную одной из сторон угла. **163.** 120°. **164.** 32°. **165.** На 100°. **166.** 69°. **169.** Рассмотрите $\triangle AOB$ и $\triangle CKD$, $K(4; -4)$. **170*.** Не верно. **171*.** Не верно.

## Глава 4

**172.** а) 70°; б) 70°; в) 60°; г) 30°. **173.** а) 80°; б) 8; в) 12; г) 28°. **174.** 100°. **175.** 150°. **176.** 10°. **178.** 40°, 50°. **179.** 24 см. **182.** 36°, 72°, 72°. **183.** 70°. **184.** 122°. **186*.** 66°. **187*.** 26°. **188*.** 360°. **189*.** 15°, 15°, 150°. **193.** б) 36°30′; в) $\frac{1}{2}\alpha$. **194.** 7 : 6 : 5. **195.** 72°, 72°, 36°. **196.** 130°. **199*.** 130°. **200*.** 60°. **201*.** 36°, 36°, 108°. **202*.** 23°. **204.** 60°. **207.** 12 см. **211.** а) Да; б) нет; в) нет. **212.** а) 25 см; б) 9 см, 9 см. **213.** а) Нет; б) нет. **216*.** 15 м. **217*.** а) В точке $C$; б) на отрезке $AB$. **223.** 8 см. **225.** 32 см. **227*.** 264 см$^2$. **231.** 64°. **232.** 40°. **233.** 30 см. **236*.** 80°. **239.** 74 см. **240.** 19 см. **241.** 60°. **242.** 32 см. **243.** 72 см. **244.** 36 см, 12 см. **245*.** 48 м. **246.** 2 см или 8 см. **247.** 17 см. **249.** 16 см. **250.** 38 см. **251.** 8,1 см. **252*.** 6 дм.

# СОДЕРЖАНИЕ

## Глава 5. Задачи на построение

Учебное издание

**Казаков** Валерий Владимирович

**ГЕОМЕТРИЯ**

Учебное пособие для 7 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Л. Н. Ясницкая*. Художник *Е. А. Ждановская*. Художественные редакторы *Е. А. Ждановская, А. И. Резанович*. Техническое редактирование и компьютерная верстка *Г. А. Дудко*. Корректоры *Е. П. Тхир, О. С. Козицкая, В. С. Бабеня, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 21.07.2017. Формат $70 \times 100^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,3 + 0,33 форз. Уч.-изд. л. 9,6 + 0,4 форз. Тираж 115 300 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»
Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/3 от 04.10.2013.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.

**Казаков, В. В.**

К14 Геометрия : учеб. пособие для 7-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / В. В. Казаков. — Минск : Народная асвета, 2017. — 173 с. : ил.

ISBN 978-985-03-2819-9.

**УДК 514(075.3=161.1)**
**ББК 22.151я721**

(Название и номер учреждения образования)

| Учебный год | Имя и фамилия учащегося | Состояние учебного пособия при получении | Оценка учащемуся за пользование учебным пособием |
|---|---|---|---|
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |
| 20 / | | | |